Едномандатни райони и поток в мрежа

Георги Георгиев (Скелета)

26 януари 2017 г.

1 Задача

Дадена е област, населена с избиратели и разделена на n по-малки административни единици (общини). Знаем броят избиратели e_i във всяка община и кои общини са съседни (имат обща граница).

Известен е броят k представители (депутати), които областта ще изпрати в парламента.

Търсим разделяне на областта на мажоритарни (едномандатни) избирателни райони (ЕИР). Всеки ЕИР ще избира един представител (депутат), искаме всички ЕИР да имат приблизително равен брой избиратели. Нека приемем, че $E_{all} = \sum_{i=1}^{n} e_i$ е кратно на k, искаме всеки ЕИР да има $C = E_{all}/k$ избиратели.

При разделянето искаме да запазим максимално географската обособеност на общините, тоест всеки ЕИР да е от избиратели от една община или (при малки общини) от няколко съседни общини.

За да осигурим равенството на избирателите, ще се наложи да местим избиратели от една община към друга. Търсим решение с минимален брой на преместени избиратели.

2 Пример

```
Област Стара Загора, списък на общини и избиратели в тях:

Братя Даскалови - 5691
Гурково - 4247
Гълъбово - 10913
Николаево - 3646
Казанлък - 68949
Мъглиж - 9444
Опан - 1892
Павел Баня - 13602
Раднево - 16918
Стара Загора - 147433
Чирпан  - 18585

общо 301320 избиратели, един мандат има C=30132 избиратели
```

Търсим такова минимално разместване на избиратели от община към съседна община, при което след разместването всяка община ще има брой избиратели, кратен на $C = 30132$.

Кои общини са съседни определяме от административната карта на България. За конкретния пример съседствата са:

```
община Стара Загора граничи с всички общини
       с изключение на Гълъбово и Павел Баня
община Братя Даскалови граничи с общини
       Павел Баня, Казанлък, Стара Загора и Чирпан
община Гурково граничи с общини Мъглиж, Николаево и Стара Загора
община Гълъбово граничи с общини Опан и Раднево
община Николаево граничи с общини Гурково, Мъглиж и Стара Загора
община Казанлък граничи с общини
       Братя Даскалови, Мъглиж, Павел Баня и Стара Загора
община Мъглиж граничи с общини
       Гурково, Казанлък, Николаево и Стара Загора
община Опан граничи с общини Гълъбово, Раднево и Стара Загора
община Павел Баня граничи с общини Братя Даскалови и Казанлък
община Раднево граничи с общини Гълъбово, Опан и Стара Загора
община Чирпан граничи с общини Братя Даскалови и Стара Загора
```

3 Математически модел

Нека $G(V, E)$ е неориентиран граф с върхове общините и ребра съседствата между общини. Нека $V = \{1, 2 \dots n\}$.

Преди разместването на избиратели община i има e_i избиратели, нека след разместването в нея има Cx_i избиратели, x_i-целочислено (x_i е броят ЕИР с център i-тата община след разместването).

Да означим с $f_{ij}, (i, j) \in E$ броят на избирателите, които преместваме от община i към съседна община j.

В сила е следния баланс на потока избиратели за i-тата община:

$$e_i + \sum_{j,(i,j)\in E} (f_{ji} - f_{ij}) = Cx_i \tag{1}$$

Формулираме задачата за намиране на минимално разместване като задача на целочисленото линейно програмиране (ЦЛП):

$$\min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} \tag{2}$$

при ограничения:

$$\begin{aligned} &\sum_{j,(i,j)\in E} (f_{ij} - f_{ji}) + Cx_i = e_i, \ \forall i \\ &x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \\ &f_{ij} \geq 0, f_{ij} \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{3}$$

Хипотеза 1: Описаната задача е **NP**-трудна.

Хипотеза 2: Условието $f_{ij} \in \mathbb{Z}$ е излишно.

Точно решение може да се получи с някой от известните пакети за ЦЛП, примерно lp_solve.

4 Приближено решаване с жаден алгоритъм

Свеждаме до потокова задача – добавяме 2 нови върха s и t в графа G. Нека s има номер 0, а t – номер $n+1$.

Добавяме ориентирани ребра от s до всички общини с пропускна способност (капацитет) $c_{s,i} = e_i$.

Неориентираните ребра в G представяме като двойка ориентирани с безкрайна пропускна способност.

Добавяме ориентирани ребра от всички общини до t с пропускна способност $c_{i,t} = 0$. Инициираме масив $x_i = 0,\ 0 < i \leq n$.

В така получения граф максималния поток от s до t е 0. Инициираме нулев поток $f_{ij} = 0$ за $0 \leq i,j \leq n+1,\ (i,j) \in E$ и изпълняваме жаден алгоритъм, който модифицира графа и потока:

[1] Избираме изходящо от s ребро с максимална стойност на $\triangle = e_i - f_{s,i}$ – броят избиратели в община i, които не са разпределени в никой ЕИР. Това е жадната стъпка в алгоритъма.

[2] Ако $\triangle = 0$ спираме (всички избиратели са разпределени). Нека $\triangle > 0$ и i е номера на общината за която се достига. Увеличаваме x_i с единица, също пропускната способност на реброто $(i,t),\ c_{i,t} = Cx_i$. Смисълът на тази стъпка е, че добавяме нов ЕИР с център община i.

[3] Насищаме потока, докато запълним увеличения капацитет $c_{i,t}$ така:

[3a] Търсим най-кратък увеличаващ път от s до t в смисъла на метода на Форд-Фалкерсон. Ползваме BFS.

[3b] Увеличаваме потока по намерения път и отиваме на стъпка [3].

[4] Отиваме на стъпка [1].

След приключване на алгоритъма правим нормировка за всяка двойка съседни общини (i,j). Нека $f_{min} = min(f_{ij}, f_{ji})$, намаляме потока и по двете ребра с f_{min}.

Ненулевите стойности на потока $f_{ij},\ 0 < i,j \leq n$ задават разместването на избирателите между съседни общини, а стойностите на масива x_i – броя ЕИР с центрове съответните общини.

Пример за неоптималност на жадния алгоритъм Нека имаме 6 общини, една централна с 10 избиратели, останалите 5 имат по 8 избиратели и са наредени около централната. Броят на мандатите е 5 ($k = 5, C = 10$). Ако централната има номер 1, неориентираните ребра в E са:

(1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) (6,2)

Жадният алгоритъм ще даде мандат на централната община, а оптималното решение дава по един мандат на всяка от периферните общини и прехвърля по 2-ма избиратели от централната към всяка периферна община.