

Име: _____, ФН: _____, Спец./курс: _____

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	20	20	20	20	20	100

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 80 точки!

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$\sum_{i=1}^n \frac{n^2}{i}, \quad \frac{n^3 + n + 1}{n + 3}, \quad \sum_{i=0}^n 2i, \quad \frac{n!}{2^n},$$

$$\binom{n}{3} \frac{1}{\lg n}, \quad \lg((n!)^n), \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{i=1}^n 3^i$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^2$ б) $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + \frac{n^2}{\lg n}$

в) $T(n) = 4T(n-2) + 2^n$ г) $T(n) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 3^n$

Задача 3 Предложете бърз алгоритъм (със сложност $\Theta(n \lg n)$), който получава два масива от n числа и връща масив $C[1 \dots m]$, в който са записани всички числа от входните масиви, но без повторения.

(а - 3 точки) Каква стойност на m е достатъчна ?

(б - 17 точки) Опишете накратко отделните стъпки (с текст, не е необходим код).

Задача 4 Даден е следният алгоритъм (n е неотрицателно цяло число):

POWER(a: real; n: integer)

```

1  r ← 1
2  while n > 0 do
3      if odd(n)
4          r ← r × a
5      a ← a × a
6      n ← ⌊n/2⌋
7  return r
```

(а - 10 точки) Докажете, че алгоритъмът изчислява a^n .

(б - 10 точки) Оценете броя умножения, които ще извърши алгоритъмът като функция на n .

Задача 5 Даден е неориентиран граф $G(V, E)$ с n върха и n ребра ($n > 2$). Докажете, че в G има цикъл.