Контролна работа (упражнения, вариант 2) по ДАА, 2.04.2013г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	14	12	10	14	50

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$2^{n^2}, \qquad n^n, \qquad n\binom{n}{2}, \qquad n^2 \lg n, \qquad \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i}, \qquad \binom{n}{3}$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n$ б) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^2$
в) $T(n) = T(n-1) + \frac{1}{2^n}$ г) $T(n) = T(n-1) + \sqrt{n}$

Задача 3 В масив A са записани числата $15, 8, 11, 7, 9, 6, 9, 6$. Пирамида ли е масивът A и ако не, защо? Ако A е пирамида с дефект, как ще изглежда масивът след поправяне на дефекта ?

Задача 4 Намерете сложността на следния алгоритъм:

```
Easy2(n: integer)
i ← 1; j ← 1
while i ≤ n do
    j ← j + j
    if j > n
        j ← 1
        i ← i + 1
```

Решения:

Задача 1 Означаваме с $f_1, f_2 \dots f_6$ дадените функции. Първо ги опростяваме, като ползваме основните свойства на асимптотичните нотации:

$$f_3 = n\binom{n}{2} = n\frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^3)$$

$$f_5 = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i} = n^2 \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i} = n^2\Theta(\ln(n^2)) = n^2\Theta(2\ln(n)) = \Theta(n^2 \lg n)$$

$$f_6 = \binom{n}{3} = \Theta(n^3)$$

Очевидно f_1 и f_2 имат експоненциален растеж, останалите – полиномиален. Логаритмуваме f_1 и f_2, за да ги сравним – $\lg(f_1) = n^2,\ \lg(f_2) = n\lg n$, следователно $f_2 \prec f_1$.

За f_3, f_4, f_5 и f_6 сравняваме степента на полинома, при равенство множителя $\lg n$.

Така получаваме наредбата:

$$f_4 = n^2 \lg n \asymp f_5 = \Theta(n^2 \lg n) \prec f_3 = \Theta(n^3) \asymp f_6 = \Theta(n^3) \prec f_2 = n^n \prec f_1 = 2^{n^2}$$

Задача 2 Случаи а) и б) са подходящи за решаване с Мастър теорема.

За а) пресмятаме $k = \log_b a = \log_3 2$ и сравняваме $n^k = n^{\log_3 2}$ с $f(n) = n$. От $\log_3 2 < 1$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{\log_3 2+\varepsilon} \prec n$. Попадаме в трети случай на Мастър теоремата, търсим константа $0 < c < 1$, такава че да е вярно неравенството $cn \geq 2(n/3)$. Неравенството е вярно за $c > 2/3$, следователно $T(n) = \Theta(n)$.

За б) пресмятаме $k = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$ и сравняваме $n^k = n^2$ с $f(n) = n^2$. Очевидно $n^k \asymp f(n)$. Попадаме във втори случай на Мастър теоремата, следователно $T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$.

Рекурентното отношение в) можем да решим със заместване – след $n-1$ замествания получаваме $T(n) = T(0) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2} = T(0) + \Theta(1)$, тъй като редът получен при сумиране на геометричната прогресия $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ е сходящ. Следователно $T(n) = \Theta(1)$.

Решаваме г) със заместване – след $n-1$ замествания получаваме $T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$. Сумата в полученото равенство можем да ограничим отдолу и отгоре с интегралите $\int_0^{n-1} \sqrt{x}dx$ и $\int_1^n \sqrt{x}dx$, тъй като тя е голяма сума на Дарбу за първия и малка сума – за втория интеграл. След пресмятане на определените интеграли и опростяване на получените изрази до тита-нотации получаваме решението $T(n) = \Theta(n\sqrt{n})$.

Задача 3 С директна проверка установяваме, че елементите на масива $A[5] = 9 > A[2] = 8$ нарушават пирамидалното свойство и $A[5]$ е син на $A[2]$. След размяната им всички неравенства в двойките (син,баща) ще са коректни и масивът $15, 9, 11, 7, 8, 6, 9, 6$ ще е пирамида.

Задача 4 Забелязваме, че j приема последователно стойности $1, 2, 4, 8 \dots 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}$, след което сработва проверката на ред 4 и тази поредица за j се повтаря, но за стойност на i, увеличена с единица. Следователно ред 6 ще се изпълни n пъти, но за всяко преминаване през редове 5-6 цикълът *while* ще премине $\Theta(\lg n)$ пъти през ред 3. Оттук сложността на програмата е $\Theta(n \lg n)$.