

Име: \_\_\_\_\_, ФН: \_\_\_\_\_, Спец./курс: \_\_\_\_\_

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	20	20	20	20	20	100

*Забележка:* За отлична оценка са достатъчни 80 точки!

**Задача 1** Дадена е редица от  $n$  числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Предложете бърз алгоритъм, който намира най-дългата растяща подредица.

**Задача 2** Едно множество  $M \subset E$  от ребра на неориентирания граф  $G(V, E)$  наричаме съвършено съчетание (perfect matching), когато няма две ребра от  $M$  с общ връх и всеки връх на  $G$  е край на ребро от  $M$ .

Нека графът  $G_n(V, E)$  се състои от върховете и ребрата на пирамида с основа правилен  $n$ -ъгълник. Докажете, че за  $G_n$  има съвършено съчетание точно когато  $n$  е нечетно.

**Задача 3** Даден е неориентиран граф  $G(V, E)$  с теглова функция  $w : E \rightarrow \{a, b\}$ , която приема само две стойности ( $0 < a < b$ ).

Нека с  $r$  означим теглото на минималното покриващо дърво за  $G$ . Предложете линеен алгоритъм за намиране на  $r$  (не е нужно алгоритъмът да намира самото дърво).

*Упътване:* Разгледайте подграфа  $G'$  на  $G$ , който съдържа само леките му ребра. Каква е зависимостта между броя на свързаните компоненти на  $G'$  и  $r$  ?

**Задача 4** Даден е кратък запис на алгоритъма  $BFS$  ( $G(V, E)$  е свързан неориентиран граф):

```

BFS( $G(V, E), s$ )
1  for  $v \in V$ 
2       $color[v] \leftarrow white$ 
3   $Q.Init$  (*  $Q$  е обикновена опашка *)
4   $color[s] \leftarrow gray$ 
5   $Q.Enqueue(s)$  (* Започваме обхождането от връх  $s$  *)
6  while  $Q \neq \emptyset$  do
7       $Q.DeQueue(u)$ 
8      for  $v \in Adj(u)$ 
9          if  $color[v] = white$ 
10              $color[v] \leftarrow gray$ 
11              $Q.Enqueue(v)$ 
    
```

(a - 10 точки) Модифицирайте го така, че да открива дали в  $G$  има цикъл с нечетна дължина.

(b - 10 точки) Модифицирайте го така, че да разпознава дали  $G$  е двуделен граф. Ако е, да изчислява съответното разбиване на върховете на два дяла.

**Задача 5** Задачата 'Хамилтонов Път' ( $HPP$  от *Hamiltonian path problem*) дефинираме така: Даден е граф  $G(V, E)$ . Съществуват ли върхове  $u, v$  на графа и път между тях, който включва всички останали върхове точно по веднъж ?

Тази задача прилича на задачата 'Хамилтонов цикъл' ( $HC$ ).

Предложете полиномиална сводимост  $HPP \propto HC$ . Обосновете коректността ѝ.