

Име: \_\_\_\_\_, ФН: \_\_\_\_\_, Спец./курс: \_\_\_\_\_

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

*Забележка:* За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

**Задача 1** Опитайте да разделите на две групи с равна сума редиците от числа, дадени по-долу. Ако това е невъзможно, предложете кратко доказателство.

(а - 10 точки) 12, 7, 31, 14, 17, 22

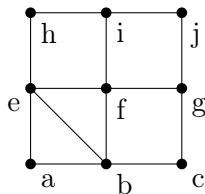
(б - 10 точки) 12, 9, 31, 15, 18, 27

**Задача 2** Във всеки връх на свързан граф има плод с определен брой калории. Една маймунка яде плодовете в произволен ред. След изяждане на плод съответният връх се изтрива заедно с излизащите ребра. Ако графът се разпадне на няколко свързани компоненти, маймунката избира една от тях и продължава да яде от нея, а другите компоненти се изтриват (така графът остава свързан). Целта на маймунката е да изяде максимум калории.

Тя прилага алчен алгоритъм: всеки път изяжда най-калоричния плод и при разпадане на графа избира компонентата с най-калоричния плод.

Ще постигне ли целта си маймунката ?

**Задача 3** Котка гони мишка в нарисувания по-долу граф:



Отначало котката е във връх  $a$ , а мишката — в  $j$ . Двете се придвижват последователно, като първа е котката. Всеки ход е придвижване по ребро в графа. Котката побеждава, ако достигне върха, в който е мишката.

Намерете печеливша стратегия за котката.

**Задача 4** Даден е неориентиран граф  $G(V, E)$  с теглова функция  $w : E \rightarrow \{1, 2\}$  (теглото на всяко ребро е 1 или 2). Нека  $s$  и  $t$  са два върха в графа. Предложете линеен алгоритъм за намиране на най-краткия път от  $s$  до  $t$ .

*Упътване:* Алгоритъмът  $BFS$  намира най-кратък път за линейно време, но ако всички ребра имат тегло 1. Можете ли да модифицирате графа така, че  $BFS$  да реши задачата?

**Задача 5** Превозвач има камион, побиращ  $K$  тона ( $K$  е цяло положително число), и трябва го натовари от склад с  $n$  контейнера, тежащи  $A[1], A[2], \dots, A[n]$  тона (цели положителни числа), чийто сбор може да надхвърля  $K$ . Превозвачът иска да оползотвори възможно най-голяма част от капацитета на камиона, т. е. да натовари контейнери с най-голям сборен тонаж.

*Пример:* Ако  $K = 20, n = 5, A = (2, 3, 3, 9, 10)$ , то оптималното решение е  $9 + 10 = 19 \leq 20$  тона.

а) (10 точки) Предложете бърз алгоритъм и го опишете на псевдокод като функция  $OptimalTransport(A[1..n], K)$ , връщаща цяло неотрицателно число – максималния сбор от тонажите на натоварените контейнери. (В примера по-горе функцията трябва да върне стойност 19)

б) (3 точки) Оценете времевата сложност на предложението от Вас алгоритъм.

в) (7 точки) Демонстрирайте работата на алгоритъма върху дадения пример.

**Задача 6** Разглеждаме следните две задачи за разпознаване:

$3PLine$  : Дадено е множество от  $n$  точки в равнината. Има ли сред тях три точки, лежащи на една права?

$TArea$  : Дадено е множество от  $n$  точки в равнината и цяло неотрицателно число  $S$ . Има ли сред дадените точки три, които образуват триъгълник с лице, не по-голямо от  $S$ ?

Намерете полиномиална сводимост  $3PLine \propto TArea$  или докажете съществуването на такава сводимост.

*Забележка:* Предполага се, че координатите на всички точки са цели числа.