Поправка по ДАА (избираем, минали години), СУ, ФМИ, 08. 02. 2016 г.

Име: ____________________________ ФН: ______ Спец.: ___ Курс: ___

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	30	20	20	20	130

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1. Решете следните рекурентни уравнения:

а) $T(n) = \sqrt{3}T(\frac{n}{2}) + n$ б) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{3}}) + n\lg n$

в) $T(n) = T(n-1) + \lg n$ г) $T(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n^2$

Задача 2. Някои от компютрите в една мрежа са свързани с комуникационни канали. Всеки от каналите се характеризира с определена надеждност — число от интервала $(0\,;\,1)$, което показва вероятността за безпроблемно предаване на съобщение по канала. Предложете бърз алгоритъм, който намира най-надеждния път между два дадени компютъра от мрежата. (Надеждността на пътя е произведението от надеждностите на съставящите го канали.)

Задача 3. Съставете алгоритъм, който по зададено цяло положително число n намира най-малкия брой точни квадрати със сбор n. (20 точки)
Разширете алгоритъма така, че да отпечатва представянето на n като сбор на най-малък брой точни квадрати. (10 точки)
Демонстрирайте алгоритъма при $n = 10$. Анализирайте сложността по време и по памет за $\forall n$.

Задача 4. Масивите $A[1\ldots n]$ и $B[1\ldots n^2]$ съдържат цели числа и са сортирани. Предложете бърз алгоритъм, който изчислява k – броят на различните числа, които се срещат и в двата масива. Опишете алгоритъма с думи, не е нужен псевдокод.
Забележка: Обърнете внимание на това, че A има n елемента, а B има доста повече – n^2.

Задача 5. Опитайте да разделите на две групи с равна сума редиците от числа, дадени по-долу. Ако това е невъзможно, предложете кратко доказателство.
(a - 10 точки) $12, 7, 31, 14, 17, 22$
(b - 10 точки) $12, 9, 31, 15, 18, 27$

Задача 6. Задачата Клика остава ли NP-пълна за двуделни графи?
Ако да — предложете подходяща редукция. Ако не — съставете бърз алгоритъм.

Решения:

Задача 1 Случаи а) и б) са подходящи за решаване с Мастър теорема.

За а) пресмятаме $k = \log_b a = \lg\sqrt{3}$ и сравняваме $n^k = n^{\lg\sqrt{3}}$ с $f(n) = n$. От $\lg\sqrt{3} < 1$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{\lg\sqrt{3}+\varepsilon} \prec n$. Попадаме в трети случай на Мастър теоремата, търсим константа $c < 1$, за която $cf(n) \geq \sqrt{3}f(\frac{n}{2})$ или $cn \geq \sqrt{3}\frac{n}{2}$. Неравенството е вярно за $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$, следователно $T(n) = \Theta(n)$.

За б) пресмятаме $k = \log_{\sqrt{3}} 2 > 1$ и сравняваме $n^k = n^{\log_{\sqrt{3}} 2}$ с $f(n) = n\lg n$. Очевидно съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{k-\varepsilon} \succ f(n)$. Попадаме в първи случай на Мастър теоремата, следователно $T(n) = \Theta(n^{\log_{\sqrt{3}} 2})$.

Рекурентното уравнение в) решаваме със заместване – след $n-1$ замествания получаваме $T(n) = T(0) + \lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n = T(0) + \lg n!$. За $\lg n!$ ползваме известната асимптотична оценка $\lg n! = \Theta(n\lg n)$, следователно $T(n) = \Theta(n\lg n)$.

Опростяваме г) като извадим равенствата, дефиниращи $T(n)$ и $T(n-1)$:

$$T(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n^2$$

$$T(n-1) = 2\sum_{i=0}^{n-2} T(i) + (n-1)^2$$

Получаваме $T(n) - T(n-1) = 2T(n-1) + 2n - 1$ или $T(n) = 3T(n-1) + 2n - 1$. Полученото еквивалентно уравнение решаваме лесно с метода на характериситчното уравнение. Хомогенната част поражда уравнението $x = 3$, с множество от корени $\{3\}$. Нехомогенната част поражда множеството корени $\{1, 1\}$. Като слеем двете мултимножества, получаваме пълния списък от корени $\{1, 1, 3\}$. Базисните решения са $1^n, n1^n, 3^n$. Последното расте най-бързо, следователно $T(n) = \Theta(3^n)$.

Задача 5. И двете редици не могат да се разделят на две групи с равна сума.

В редицата $12, 7, 31, 14, 17, 22$ има 3 нечетни числа, значи и сумата на всичките ѝ елементи е нечетна. Ако имаше правилно разделяне на групи със сума k, цялата сума е четна – $2k$.

В редицата $12, 9, 31, 15, 18, 27$ само 31 не се дели на 3, за всяко разделяне на две групи сумата в едната група ще се дели на 3, а в другата (където е 31) няма да се дели на 3.