Контролна работа (упражнения, вариант 3) по ДАА, 5.06.2013г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	16	16	18	0	50

Задача 1 Кубичният граф има има 8 върха и 12 ребра (съоветно върховете и ръбовете на обикновен куб).

(a) Нарисувайте този граф така, че ребрата му да не се пресичат.

(b) Намерете минимално доминиращо множество в графа.

(c) Намерете максимално независимо множество в графа.

(d) Намерете максимално съчетание в графа.

Задача 2 Неориентиран граф с n върха съдържа 2 различни хамилтонови цикъла. Докажете, че графът има поне $n+2$ ребра.

Задача 3 Нека двама играчи, A и B, играят финален мач по снукър, като титлата ще е за играчът, който пръв спечели n игри. Да допуснем, че играчите са еднакво силни, тоест всеки има 50% шанс да спечели всяка отделна игра. Вече са изиграни $i+j$ игри, като A е спечелил i, а B - j игри. Предложете бърз алгоритъм, който да изчислява вероятността A да спечели финала.

Пример: Ако $i = n - 1$ и $j = n - 3$, вероятността A да спечели е $7/8$, тъй като е достатъчно да спечели някоя от следващите 3 игри.

Задача 3 Да означим върховете на куба с $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$.

(a) рисуваме квадрат a_1, b_1, c_1, d_1, а вътре в него по-малък квадрат a_2, b_2, c_2, d_2, после свързваме a_1 с a_2, b_1 с b_2 и т.н.

(b) върховете (a_1, c_2) доминират всичките върхове на графа, а един връх не може да доминира всички други, следователно (a_1, c_2) представя минимално доминиращо множество.

(c) $\{a_1, c_1, b_2, d_2\}$ е върхово покритие, всяко ребро е покрито от точно един връх от него, следователно е минимално. Останалите 4 върха $\{a_2, c_2, b_1, d_1\}$ ще представят максимално независимо множество.

(d) ребрата (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2) не се допират и покриват всички върхове, следователно представят максимално съчетание.

Задача 2 Тъй като графът съдържа 2 хамилтонови цикъла, той има поне $n+1$ ребра. Да допуснем, че има точно $n+1$ ребра. Нека първият цикъл е $(v_1, v_2 \dots v_n)$. Оставащото ребро е хорда в този цикъл, то свързва два несъседни върха (v_i, v_j). Вторият цикъл ще мине задължително през него.

Да разгледаме ребрата (v_i, v_{i-1}) и (v_i, v_{i+1}). Едното от тях ще влезе във втория цикъл, другото няма да е в него, защото през върха v_i минават точно 2 ребра от цикъла.

Да допуснем, че (v_i, v_{i-1}) не е във втория хамилтонов цикъл. Тогава през върха v_{i-1} ще мине само едно ребро - (v_{i-2}, v_{i-1}) и вторият цикъл е невъзможен.

Задача 3 Да дефинираме рекурсивна процедура за изчисляване на вероятността играч A да спечели при вече изиграни $i+j$ игри:

P(i,j,n: integer)
- **if** $i = n$
  - **return** 1
- **if** $j = n$
  - **return** 0
- **return** $\frac{1}{2}P(i+1, j, n) + \frac{1}{2}P(i, j+1, n)$

Тази процедура има 2 аргумента i и j, които заемат стойности между 0 и n. Можем да представим стойностите ѝ в двумерна таблица и да я запълним за време $O(n^2)$:

CreateP(n: integer)
- Създай масив $P[0 \dots n, 0 \dots n]$
- **for** $i = 0$ **to** n
  - $P[n, i] \leftarrow 1$
  - $P[i, n] \leftarrow 0$
- **for** $i = n-1$ **downto** 0
  - **for** $j = n-1$ **downto** 0
    - $P[i, j] \leftarrow \frac{1}{2}P[i+1, j] + \frac{1}{2}P[i, j+1]$

Критерии за оценяване:

Задача 1: по 4 точки за всяко подусловие.

Задача 2: Дават се точки според коректността и пълнотата на доказателство.

Задача 3: 6 точки за рекурсивно изразяване на решението, 12 за ефективно изчисляване чрез таблица или друг метод за динамично програмиране.