Писмен изпит (поправителна сесия) по ДАА, 06.09.2013г.

Име: ________________________________, ФН:______, Спец./курс:________

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{i}, \qquad \frac{n^3+n+1}{n+3}, \qquad \sum_{i=0}^{n} 2i, \qquad \frac{n!}{2^n},$$

$$\binom{n}{3}\frac{1}{\lg n}, \qquad \lg((n!)^n), \qquad (1+\frac{1}{n})^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} 3^i$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^2$ б) $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + \frac{n^2}{\lg n}$

в) $T(n) = 4T(n-2) + 2^n$ г) $T(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 3^n$

Задача 3 Алгоритъмът по долу получава два масива от n числа и връща масив $C[1 \dots n]$, в който са запълнени първите k позиции:

```
INTERSECTION(A[1...n], B[1...n])
create array C[1...n]
k ← 0
for i ← 1 to n
    found ← false
    for j ← 1 to n
        if A[i] = B[j]
            found ← true
    if found
        k ← k + 1
        C[k] ← A[i]
return C, k
```

(a - 10 точки) Докажете, че алгоритъмът записва в масива $C[1 \dots k]$ общите елементи на масивите $A[1 \dots n]$ и $B[1 \dots n]$.

(b - 10 точки) Подобрете алгоритъма така, че да работи по-бързо (за време $\Theta(n \lg n)$).

Задача 4 Даден е неориентиран граф $G(V, E)$ с теглова функция w, която интерпретираме като разстояния между върховете. Върховете на графа са населени места, в някои от тях има полицейски управления. Предложете бърз алгоритъм, който намира населено място, което е най-отдалечено от полицейско управление (разстоянието до най-близкото управление е максимално).

Задача 5 Даден е масив $C[1 \ldots n]$ от интервали $[a_i, b_i]$. Казваме, че интервал $C[j]$ се влага в интервал $C[i]$, когато $a_i \leq a_j$ и $b_i \geq b_j$. Предложете бърз алгоритъм, който намира най-голямото подмножество интервали от C, които могат последователно да се вложат един в друг.

Задача 6 За посочените по-долу задачи обяснете кратко дали могат да бъдат решени бързо или не. Ако задачата може да се реши бързо, посочете с кой от изучаваните алгоритми може да стане това, а ако не може, посочете причина:

(a) Даден е свързан неориентиран граф $G(V, E)$ и теглова функция $w : E \to R^+$. Да се намери най-лекият свързан подграф на G.

(b) Даден е граф $G(V, E)$. Има ли цикъл в графа, който минава точно веднъж през всички върхове?

(c) Даден е ориентиран граф $G(V, E)$ и два негови върха s и t. Има ли път от s до t?

(d) Дадено е множество дизюнкции над булевите променливи $x_1, x_2 \ldots x_n$. Всяка дизюнкция съдържа точно 2 литерала (литерал е някаква променлива или нейното отрицание). Можем ли да съпоставим логически стойности $True$ и $False$ на променливите, така че всички дизюнкции да бъдат удовлетворени?

(e) Дадено е множество дизюнкции над булевите променливи $x_1, x_2 \ldots x_n$. Всяка дизюнкция съдържа точно 3 литерала. Можем ли да съпоставим логически стойности $True$ и $False$ на променливите, така че всички дизюнкции да бъдат удовлетворени?

Решения:

Задача 1 Означаваме с $f_1, f_2 \dots f_8$ дадените функции. Първо ги опростяваме, като ползваме основните свойства на асимптотичните нотации:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{i} = n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n^2 H_n = n^2 \Theta(\lg n) = \Theta(n^2 \lg n) \\
f_2 &= \Theta(n^2) \text{ (ограничаваме с подходящи неравенства)} \\
f_3 &= \Theta(n^2) \\
f_4 &= \frac{n!}{2^n} \\
f_5 &= \frac{n^3}{\lg n} \\
f_6 &= n \lg(n!) = n\Theta(n \lg n) = \Theta(n^2 \lg n) \\
f_7 &\approx e = \Theta(1) \\
f_8 &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} = \Theta(3^n)
\end{aligned}
$$

Сравняваме експоненциалните f_4 и f_8 с логаритмуване, получаваме $f_8 \prec f_4$.

Останалите функции са полиномиални, сравняваме ги според степента и допълнителният множител.

Окончателна наредба:

$$
f_7 = \Theta(1) \prec f_2 \asymp f_3 = \Theta(n^2) \prec f_1 \asymp f_6 = \Theta(n^2 \lg n) \prec f_5 = \frac{n^3}{\lg n} \prec f_8 = \Theta(3^n) \prec f_4 = \frac{n!}{2^n}
$$