

Име: _____, ФН: _____, Спец.: _____, Курс: _____

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Общо |
|----------------|----|----|----|----|----|----|------|
| получени точки | | | | | | | |
| максимум точки | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 120 |

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1. Решете следните рекурентни уравнения:

а) $T(n) = 2\sqrt{2}T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^3$ б) $T(n) = T(n-1) + \frac{1+n}{n^2}$

в) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 2^{\frac{n}{2}}$ г) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg n$

Задача 2. Масивът $A[1, 2, \dots, n]$ съдържа m инверсии. *Инверсия* е всяка двойка индекси (i, j) , такива че $1 \leq i < j \leq n$ и $A[i] > A[j]$. Докажете, че алгоритъмът INSERTIONSORT сортира A за $\Theta(m + n)$ стъпки.

Задача 3. Даден е ориентиран граф $G(V, E)$. Докажете или опровергайте всяко от следните твърдения:

- (а) Ако G има една силно свързана компонента, в него има хамилтонов цикъл.
- (б) Ако в G има хамилтонов цикъл, той има само една силно свързана компонента.

Задача 4. Нека A е крайно множество, а $B \subset 2^A$ е фамилия от негови подмножества. Предложете бърз алгоритъм, който намира най-дългата растяща спрямо включването редица от елементи на B .

Задача 5. Даден е неориентиран граф $G(V, E)$. Предложете бърз алгоритъм, който разпознава дали множеството от върхове може да бъде разбито по единствен начин на множества V_1 и V_2 , такива, че всяко ребро свързва върхове от V_1 и V_2 .

Задача 6. *проста задача за сводимост*

РЕШЕНИЯ

Задача 2. Една възможна реализация на алгоритъма INSERTIONSORT е:

```
INSERTIONSORT( $A[1 \dots n]$ )
1  for  $i \leftarrow 2$  to  $n$ 
2       $j \leftarrow i - 1$ 
3      while  $(j > 0) \wedge (A[j] > A[j + 1])$  do
4          swap( $A[j], A[j + 1]$ )
5           $j \leftarrow j - 1$ 
```

Очевидно всяко изпълнение на ред 4 намалява броя на инверсиите с единица. Следователно, тялото на цикъла **while** се изпълнява точно m пъти общо, за цялото изпълнение на INSERTIONSORT. За всяка стойност на i , ред 3 се изпълнява, докато има инверсии в подмасива $A[1 \dots i]$ и още веднъж, когато инверсиите са свършили, за да се напусне цикълът. Сумарно за цялата сортировка това ще даде $m + n - 1$ изпълнения на ред 3. Редове 1 и 2 се изпълняват $n - 1$ пъти.

Сумираме горните оценки и получаваме време за изпълнение $\Theta(m + n)$.

Задача 3.

Задача 4.

Задача 5. Пускаме модификация на *BFS*, която проверява дали графът е двуделен и свързан едновременно.

Задача 6.