Първо домашно по Дискретни структури, 10.11.2017г.

Име: _______________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Задача 1. Докажете, че за всяко естествено $n \geq 2$ е вярно равенството:

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

Задача 2. Нека α е реално, а n е положително естествено число. Докажете, че някое от числата $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \dots n\alpha$ е на растояние най-много $\frac{1}{n}$ от някое цяло число.

Упътване: Ползвайте принципа на Дирихле.

Задача 3. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, а $\mathbb{S}_+$ е множеството от строго растящи крайни редици от естествени числа:

$$\mathbb{S}_+ = \{(n_0, n_1 \dots n_k) | k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}, n_0 < n_1 < \dots < n_k\}$$

Постройте биекция между множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{S}_+$.

Упътване: За произволно естествено число m разгледайте редицата от позициите на единиците в двоичния запис на m.

Задача 4. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, а $\mathbb{S}$ е множеството от крайни редици от естествени числа:

$$\mathbb{S} = \{(n_0, n_1 \dots n_k) | k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}\}$$

Постройте биекция между множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{S}$.

Упътване: За произволно естествено число m разгледайте редицата от броя на нулите между всеки две поредни единици в двоичния запис на m.

Задача 5. Нека $\mathbb{S}_Q^+$ е множеството от строго растящи безкрайни редици от рационални числа:

$$\mathbb{S}_Q^+ = \{\{q_i\}_{i=0}^{\infty} | \ \forall i \ (q_i \in \mathbb{Q}) \wedge (q_i < q_{i+1})\}$$

Нека $\prec$ е релация над редиците от $\mathbb{S}_Q^+$, определена така:

$\{q_i\} \prec \{\mathrm{p}_i\}$, когато съществува n_0, такова, че за всяко $j > n_0$ и за всяко i е изпълнено неравенството $q_i < p_j$.

(a) Докажете, че $\prec$ е антирефлексивна, транзитивна и антисиметрична.

Дефинираме нова релация $\{q_i\} \sim \{\mathrm{p}_i\}$, когато нито $\{q_i\} \prec \{\mathrm{p}_i\}$, нито $\{p_i\} \prec \{q_i\}$

(b) Докажете, че $\sim$ е релация на еквивалентност.

(c) Как изглеждат класовете на еквивалентност на $\sim$, дайте интуитивно описание.