

**Тема 1 а** Дефинирайте релация и релация на еквивалентност. Докажете, че всяка релация на еквивалентност разбива областта си на класовете на еквивалентност.

**Тема 1 б** Докажете, че неориентиран граф е свързан, точно когато има покриващо дърво.

**Тема 2 а** Дефинирайте крайно, безкрайно и изброимо множество. Докажете, че съществува безкрайно множество, което не е изброимо.

**Тема 2 б** Докажете, че е вярна следната формула на Нютон:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

**Тема 3 а** Докажете, че декартовото произведение на две изброими безкрайни множества е изброимо.

**Тема 3 б** Докажете, че всяка булева функция може да се представи като формула над елементарните функции отрицание, конюнкция и дизюнкция. Твърдението е известно като *Теорема на Бул*.

**Тема 4 а** Дайте дефиниция на крайна и безкрайна редица. Дефинирайте крайно, безкрайно и изброимо множество. Формулирайте принципа на Дирихле.

**Тема 4 б** Докажете, че всяка булева функция може да се представи по единствен начин чрез полином на Жегалкин.

**Тема 5 а** Дефинирайте частична наредба, верига и контур в релация. Докажете, че една рефлексивна и транзитивна релация е частична наредба точно когато не съдържа контури.

**Тема 5 б** Дефинирайте функциите  $n!$  и  $\binom{n}{k}$ .

Нека  $A$  и  $B$  са крайни множества и  $|A| = n, |B| = m$ .

Изведете формули за броя на функциите  $f : A \rightarrow B$ , при допълнително изискване:

(а)  $f$  е тотална.

(б)  $f$  е частична.

(с)  $f$  е инекция.

**Тема 6 а** Дефинирайте минимален и максимален елемент в частична наредба. Докажете, че всяка крайна частична наредба може да се разшири до пълна.

**Тема 6 б** Дефинирайте понятията импликанта и проста импликанта. Дайте пример на булева функция на 3 променливи, която има 4 единици в табличното си изписване, такава че минималната ѝ ДНФ съвпада със СъвДНФ.

**Тема 7 а** Докажете, че няма биекция  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ . Твърдението е известно като *Диagonalен метод на Кантор*.

**Тема 7 б** Дефинирайте графа на  $n$ -мерния хиперкуб. Дайте обоснован отговор на въпросите:

(а) За кои стойности на  $n$  в този граф има хамилтонов цикъл?

(б) За кои  $n$  в графа има ойлеров цикъл?

**Тема 8 а** Докажете, че има биекция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**Тема 8 б** Опишете задачите, които решават алгоритмите на Прим и Дейкстра. Посочете прилики и разлики между тия задачи и между съответните алгоритми.

**Тема 9 а** Дефинирайте релация на частична наредба. Дефинирайте понятието път в граф. Разгледайте релацията 'има път от връх  $u$  до връх  $v$ '. Кога тази релация е частична наредба и кога е релация на еквивалентност?

**Тема 9 б** Дефинирайте графа на  $n$ -мерния хиперкуб. Дайте обоснован отговор на въпросите:  
(а) За кои стойности на  $n$  в този граф има хамилтонов цикъл?  
(б) За кои  $n$  графът е двуделен?

**Тема 10 а** Докажете, че няма биекция  $f : A \rightarrow 2^A$  за произволно множество  $A$ . Твърдението е известно като *Диагонален метод на Кантор*.

**Тема 10 б** Изведете формула за броя на редиците от естествени числа  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , за които  $\sum_{i=1}^k x_i = n$  и  $x_i \geq 0$ .

**Тема 11 а** Докажете, че декартовото произведение на две изброими безкрайни множества е изброимо.

**Тема 11 б** Дефинирайте понятието 'свързана компонента' в неориентиран граф. Дефинирайте понятието 'силно свързана компонента' в ориентиран граф.

**Тема 12 а** Докажете теоремата на Ойлер, описваща необходимите и достатъчни условия за съществуване на ойлеров цикъл в граф.

**Тема 12 б** Формулирайте принципа на Дирихле. Формулирайте принципа за включване и изключване.