Контролно по Дискретни структури, 02.12.2017г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	6	6	6	6	6	30

Задача 1. Нека $x \in \mathbb{R}, x > 0$, а $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Докажете, че $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Задача 2. Тази есен във ФМИ учат 50 студенти с име от множеството { Иван, Георги, Стефан, Никола }. Докажете, че измежду тези студенти има такива, които имат имен ден на една и съща дата, и са родени в един и същ месец.

Задача 3. Полетата от шахматната дъска представяме като множество от двойки (i, j), където i е номер на вертикал, а j - номер на хоризонтал – $C = \{(i, j) | i \in I_8, j \in I_8\}$.

Определяме релацията R между двойки полета така – $(i, j)R(u, v)$ когато офицер, разположен на полето (i, j) може с няколко хода да достигне полето (u, v).

(а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

(б) Колко класа на еквивалентност има R, има ли специално обозначаване на тия класове върху шахматната дъска?

Задача 4. На планетата Тралфамадор[1] правилата на играта табла се различават леко от земните. Там играчите хвърлят 3 зарчета на всеки ход. Зарчето има 8 страни, на които са обозначени от една до осем точки.

Комбинация на зарчетата наричаме тройката числа, която съответства на броя на точките върху горната страна на падналите зарчета. Както и на Земята, редът на числата няма значение, тоест тройките $(2, 7, 5)$ и $(5, 2, 7)$ представят една комбинация.

Колко са възможните комбинации при хвърляне на зарчета на Тралфамадор?

Задача 5. Дадени са функции $f : A \to B$ и $g : A \to B$, които са биекции. Известно е, че $\exists a \in A : f(a) \neq g(a)$ (функциите се различават при някоя стойност на аргумента).

Докажете, че $\exists b \in A : a \neq b,\ f(b) \neq g(b)$ (функциите се различават и при друга стойност на аргумента).

---

[1] *от Уикипедия:*

Тралфамадор е родната планета на извънземните пришълци в някои от романите на Кърт Вонегът.

Детайлите за жителите и се променят от роман в роман.

В 'Кланица-5' те са същества, които съществуват паралелно във всички времеви точки. Така те са привилегировани да познават бъдещи събития, включително виждат разрушаването на Вселената, когато Тралфамадорски пилот-изпитател изпробва нов модел двигател за космически кораб. Те отвличат героя на романа Били Пилгрим и го затварят в прозрачна клетка в зоопарка на Тралфамадор заедно с отвлечена известна земна порноактриса.

В 'Сирените на Титан' Тралфамадор е родина на цивилизация от роботи, които изпращат своя пратеник Сало да отнесе послание към обитателите на далечна галактика. След повреда на кораба му, Сало е принуден да кацне на Титан, спътник на Сатурн, и там изчаква пристигането на необходимата му резервна част. Посредник при доставката е земният жител Уинстън Найлс Ръмфорд. Сало съществува и се движи по нормалните физически закони, докато Ръмфорд и кучето му са размити във времето, подобно на тралфамадорците в 'Кланица-5'.

В 'Бога да Ви поживи, мистър Розуотър' се описва еволюцията на планетата. Когато технологииите на Тралфамадор се развили достатъчно, нормалните живи същества, подобни на нас, хората, постепенно били изместени от машини-роботи, толкова съвършени, че за жителите на Тралфамадор животът загубил смисъла си и те се самоубили масово.

Решения:

Задача 1.

Доказваме по индукция:

(1) За $n = 1$ твърдението е очевидно.

(2) Нека неравенството е вярно за n:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

И двата израза са положителни, умножаваме ги по $1 + x > 0$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

Разкриваме скобите в дясната част:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2$$

Членът $nx^2 > 0$, следователно:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$$

Неравенството е вярно и за $n + 1$:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

От принципа на индукцията следва, че е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2.

На всеки студент съпоставяме двойка от вида (име, месец на раждане). Броят на различните двойки е най-много 48 (4 възможни имена, 12 възможни месеца на раждане).

Тъй като студентите са 50, съпоставянето не е биекция. Съгласно принципа на Дирихле ще има поне двама студенти на които сме съпоставили една и съща двойка (име, месец). Те ще празнуват имен ден на една и съща дата и рожден ден в един и същ месец.

Задача 3.

(a) Релацията R е релация на еквивалелнтност не само за офицер, а за всяка шахматна фигура освен пешка, по следните причини:

(1) R е рефлексивна, защото фигурата може да направи ход, а при следващия ход да се върне на изходното поле.

(2) R е симетрична, защото фигурата може да направи поредица ходове, а след това да изпълни същата поредица наобратно и да се върне на изходното поле.

(3) R е транзитивна, защото фигурата може да направи поредица ходове от поле (i, j) до поле (u, v), а след това да изпълни нова поредица от поле (u, v) до поле (x, y). Последователното изпълнение (композицията) на двете поредици мести фигурата от поле (i, j) до поле (x, y).

(b) При игра на шах офицерите се движат по диагонал. При такова движение броят полета изминати по хоризонтал (без значение наляво или надясно) е равен на броя полета, изминати по вертикал (без значение нагоре или надолу). Нека този брой е k.

Формално от поле (i, j) за един ход офицерът ще попадне в поле $(i \pm k, j \pm k)$. При такова движение четността на сумата от координатите $i + j$ се запазва.

Нека наречем **бели** полетата с четна сума на координатите и **черни** полетата с нечетна сума на координатите (на обичйната шахматна дъска полетата са боядисани по този начин).

От предните разсъждения е ясно, че офицер не може да се премести от бяло на черно поле и обратно. Следователно има поне два класа на еквивалентност.

Доказателство, че белите полета образуват един клас на еквивалентност:

(i) от поле $(1,1)$ с един ход се достига до полета от вида (i,i), $i = 2, 3 \ldots 8$.

(ii) Нека полето (u,v), $u \neq v$ има различни координати и е бяло. Нека $u > v$ (другият случай е симетричен). Тък като $u+v$ е четно, следователно и $u-v$ е четно. Нека $u-v = 2k > 0$, тогава $u-k = v+k$, нека $i = u-k = v+k$ или $u = i+k, v = i-k$. От поле (i,i) с един ход се достига до поле $(u,v) = (i+k, i-k)$.

Показахме, че с най-много два хода офицер достига от поле $(1,1)$ до всяко бяло поле.

Подобно доказателство можем да направим и за черните полета.

Следователно класовете на еквивалентност са два – белите и черните полета на шахматната дъска.

Задача 4.

Търсим конфигурации без наредба, с повтаряне. Всяко хвърляне на зарче е избор на число от множеството $\{1, 2 \ldots 8\}$. Избираме 3 пъти, като можем да повторим избора (да хвърлим 2 или 3 еднакви зара).

Общата формула за избор на k елемента от множество с n елемента е $\binom{n+k-1}{k}$. В задачата $k = 3$, а $n = 8$.

Броят комбинации е $\binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = 120$.

Задача 5.

По условие съществува $a \in A : f(a) \neq g(a)$, нека $f(a) = y, y \in B$. Функцията g е биекция, следователно обратната и функция g^{-1} съществува и също е биекция.

Нека $g^{-1}(y) = b$. Ако допуснем $a = b$ получаваме $g(a) = g(b) = g(g^{-1}(y)) = y$, противоречие с условието $f(a) \neq g(a)$. Следователно $a \neq b$.

Вече пресметнахме $g(b) = y$, ако допуснем, че $f(b) = y$ ще се окаже, че f не е инекция, тъй като $f(a) = y$. Намерихме b, такова че $a \neq b,\ f(b) \neq g(b)$.