Контролно по Дискретни структури, 01.12.2018г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	6	6	6	6	6	30

Задача 1. Редицата на Фибоначи дефинираме така:

(1) $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$

(2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n > 1$

Докажете, че членовете от вида F_{3k} са четни.

Упътване: Пробвайте доказателство по индукция.

Задача 2. Множеството A съдържа 1010 естествени числа от $I_{2018} = \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$.

Докажете, че има две числа от A, чиято сума е 2019.

Упътване: Нека B се състои от числата от вида $2019 - i$, където $i \in A$. Разсъждавайте за сечението на A и B, възможно ли е $A \cap B = \emptyset$?

Задача 3. Точките в равнината можем да представим чрез техните координати като двойки реални числа: $\mathbb{R}^2 = \Big\{(x\,,\,y) \mid x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}\Big\}$. Релацията $P \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ е определена по следния начин:

$$P \;=\; \left\{ \Big((x_1, y_1)\,,\,(x_2, y_2)\Big) \;\middle|\; x_1 + y_1 \;=\; x_2 + y_2 \right\}$$

а) Да се докаже, че P е релация на еквивалентност. (3 точки)

б) Да се опише и начертае класът на еквивалентност на точката $(2, 3)$. (3 точки)

Задача 4 Дадено е крайно множество A и тотална функция $f : A \to A$, която е инекция. Докажете, че f е биекция.

Задача 5. Намерете кратка формула за сумата:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i}$$

Докажете верността ѝ.

Примерни решения:

Задача 1. Доказателството извършваме с индукция по k, но доказваме по-сложно твърдение:

Членовете от вида F_{3k} са четни, а членовете от вида F_{3k+1} и F_{3k+2} са нечетни.

(1) База: При $k = 0$ първите 3 члена на редицата на Фибоначи са $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$ и твърдението за четността им е вярно.

(2) Ако е вярно за k, верността за $k + 1$ проверяваме, като ползваме рекурентното уравнение.

Задача 4. Нека $B = \{y : \exists x \in A, y = f(x)\}$ е множеството от значенията на f.

Ако $A = B$, то f е биекция.

Ако B е същинско подмножество на A, то има по-малко елементи и тогава, съгласно с принципа на Дирихле, поне два елемента на A ще бъдат изобразени от f в един елемент на B, което противоречи на условието, че f е инекция.

Задача 5. Кратката формула е:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n}$$

Верността ѝ следва от факта, че сумата на всички биномни коефициенти от вида $\binom{2n+1}{i}$ е 2^{2n+1}, а в задачата сумираме само половината коефициенти – тези с номера от 0 до n.

От тривиалното равенство $\binom{2n+1}{i} = \binom{2n+1}{2n+1-i}$ следва, че на всеки коефициент с малък номер съответства равен нему коефициент с голям номер, а оттам и равенството на сумите:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i}$$

Следователно търсената сума е половината от сумата на всички коефициенти.