

Име: \_\_\_\_\_, ФН: \_\_\_\_\_, Спец./курс: \_\_\_\_\_

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

*Забележка:* За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

**Задача 1** Нека  $R_1$  и  $R_2$  са двуместни релации над множеството  $A$  и  $R_1 \subset R_2$ . Докажете че:

(а) Ако  $R_2$  е антисиметрична, то  $R_1$  е антисиметрична.

(б) Ако  $R_1$  е рефлексивна, то  $R_2$  е рефлексивна.

**Задача 1** В равнината е даден квадратът  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$ . Релацията  $R \subset S \times S$  е определена по следния начин:

$$R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 = x_2, y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Да се докаже, че  $R$  е релация на еквивалентност и да се определи класът на еквивалентност на точката  $(2, 4)$ .

**Задача 2** Дадено е множество  $A$  и функции  $f : A \rightarrow A$  и  $g : A \rightarrow A$ , които са биекции. Известно е, че  $\exists x_0 \in A : f(x_0) \neq g(x_0)$ . Докажете, че  $\exists x_1 \in A : x_1 \neq x_0, f(x_1) \neq g(x_1)$ .

**Задача 3** Нека  $n \in \mathbb{N}^+$  и  $a_n = 2 + 8 + 24 + \dots + n2^n$ . Намерете формула за  $a_n$ , като съставите линейно рекурентно уравнение за  $a_n$  и го решите при подходящи начални условия.

**Задача 4** Точките от една окръжност са оцветени в два цвята. Докажете, че съществува равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове, лежащи на окръжността.

*Упътване:* Впишете правилен петъгълник в окръжността и разсъждавайте за цветовете на върховете му.

**Задача 5** Нека графът  $B_n$  е  $n$ -мерният двоичен куб (върховете са всички  $n$ -мерни двоични вектори, два върха са свързани, ако векторите им се различават на точно една позиция). Дайте обосновани отговори на следните въпроси:

а) Колко ребра има най-късият път от връх  $\alpha = 00 \dots 0$  до връх  $\beta = 11 \dots 1$ ?

б) Какъв е броят на всички най-кратки пътища от връх  $\alpha$  до връх  $\beta$ ?

**Задача 6** Напишете свършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция  $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \oplus z)$ .