Писмен изпит (студенти от минали години) по ДАА, 01.07.2013г.

Име: _______________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$n^{\frac{n}{\lg n}}, \qquad \lg((n!)^n), \qquad \sum_{i=0}^{n} 2^i, \qquad n^2 \lg n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^n, \qquad n + \lg(n!), \qquad \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i}, \qquad \binom{n}{2}$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = \sqrt{3}T(\frac{n}{2}) + n$ б) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{3}}) + n \lg n$

в) $T(n) = T(n-1) + \lg n$ г) $T(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n^2$

Задача 3 Сортиране с размени (swap-ове) ще наричаме сортиране на масив $A[1 \ldots n]$, което извършваме само с размени на двойки елементи в масива. Всяка размяна ще обозначаваме с (i, j), където i и j са индексите на елементите, които разменяме.

(a - 6 точки) Сортирайте масива $13, 8, 4, 6, 7, 11$ с възможно най-малък брой размени. Опишете поредицата размени и междинни състояния на масива.

(b - 14 точки) Докажете, че за сортиране на масив $A[1 \ldots n]$ са достатъчни не-повече от $n - 1$ размени.

Упътване: Използвайте математическа индукция, за да докажете подусловие (b).

Задача 4 Намерете асимптотичната сложност на всеки от следните два фрагмента от програми като функция на n.

```
int f(int n) {
 int s=0, i=1;
 while (s <= n) {
  s += i;
  i++; }
 return i; }
```

```
int g(int n) {
 int s=0, t;
 if (n < 1) return 1;
 for(t=0; t<n; t++)
  s += g(n-1);
 return s;}
```

Задача 5 Даден е неориентиран граф $G_1(V, E_1)$ с теглова функция w. Най-краткият път в графа P_1 между върховете s и t има сума от теглата на ребрата p_1. След премахване на няколко ребра от G_1 бил получен графът $G_2(V, E_2), E_2 \subset E_1$. P_2 е най-краткият път между s и t в G_2 и има сума от теглата на ребрата p_2.

(a - 12 точки) Докажете неравенството $p_1 \leq p_2$.

(b - 4 точки) Дайте пример на двойка графи G_1 и G_2, за които се достига равенство $p_1 = p_2$.

(c - 4 точки) Дайте пример на двойка графи G_1 и G_2, за които се достига неравенство $p_1 < p_2$.

Задача 6 Даден е неориентиран граф $G(V, E)$ и теглова функция $w : E \to R^+$. Нека T е минимално покриващо дърво за G, а C е най-краткият маршрут на търговския пътник (цикъл, минаващ по веднъж през всеки връх с минимална сума на теглата на ребрата). Докажете неравенството:

$$\sum_{(u,v) \in T} w_{(u,v)} < \sum_{(u,v) \in C} w_{(u,v)}$$

Упътване: Махнете едно ребро от хамилтоновия цикъл C и покажете, че остатъкът е дърво.

Решения:

Задача 1 Означаваме с $f_1, f_2 \dots f_8$ дадените функции. Първо ги опростяваме, като ползваме основните свойства на асимптотичните нотации:

$$f_1 = n^{\frac{n}{\lg n}} = (2^{\lg n})^{\frac{n}{\lg n}} = 2^n$$
$$f_2 = \lg((n!)^n) = n\lg(n!) = n\Theta(n\lg n) = \Theta(n^2\lg n)$$
$$f_3 = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 = \Theta(2^n)$$
$$f_4 = n^2\lg n$$
$$f_5 = \sum_{i=1}^{n} 2^n = n2^n$$
$$f_6 = n + \lg(n!) = n + \Theta(n\lg n) = \Theta(n\lg n)$$
$$f_7 = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i} = n^2\sum_{i=1}^{n^2}\frac{1}{i} = n^2 H_{n^2} = n^2\Theta(\lg n^2) = \Theta(n^2\lg n^2) = \Theta(n^2\lg n)$$
$$f_8 = \binom{n}{2} = \Theta(n^2)$$

Очевидно f_1, f_3 и f_5 имат експоненциален растеж, останалите – полиномиален.

$f_1 \asymp f_3$, а неравенството $f_1 \prec f_5$ следва от граничния преход $\lim_{n\to\infty}\frac{f_1}{f_5} = 0$.

За функциите с полиномиален растеж имаме $f_2 \asymp f_4 \asymp f_7 = \Theta(n^2\lg n)$ и $f_6 \prec f_8 = \Theta(n^2)$. Заради множителя $\lg n$ функциите f_2, f_4, f_7 са по-бързо растящи от f_8.

Така получаваме наредбата:

$$f_6 = \Theta(n\lg n) \prec f_8 = \Theta(n^2) \prec f_2 = \Theta(n^2\lg n) \asymp f_4 = n^2\lg n \asymp f_7 = \Theta(n^2\lg n) \prec$$
$$\prec f_1 = 2^n \asymp f_3 = \Theta(2^n) \prec f_5 = n2^n$$

Задача 2 Случаи а) и б) са подходящи за решаване с Мастър теорема.

За а) пресмятаме $k = \log_b a = \lg\sqrt{3}$ и сравняваме $n^k = n^{\lg\sqrt{3}}$ с $f(n) = n$. От $\lg\sqrt{3} < 1$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{\lg\sqrt{3}+\varepsilon} \prec n$. Попадаме в трети случай на Мастър теоремата, търсим константа $c < 1$, за която $cf(n) \geq \sqrt{3}f(\frac{n}{2})$ или $cn \geq \sqrt{3}\frac{n}{2}$. Неравенството е вярно за $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$, следователно $T(n) = \Theta(n)$.

За б) пресмятаме $k = \log_{\sqrt{3}} 2 > 1$ и сравняваме $n^k = n^{\log_{\sqrt{3}} 2}$ с $f(n) = n\lg n$. Очевидно съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{k-\varepsilon} \succ f(n)$. Попадаме в първи случай на Мастър теоремата, следователно $T(n) = \Theta(n^{\log_{\sqrt{3}} 2})$.

Рекурентното отношение в) решаваме със заместване – след $n-1$ замествания получаваме $T(n) = T(0) + \lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n = T(0) + \lg n!$. За $\lg n!$ ползваме известната асимптотична оценка $\lg n! = \Theta(n\lg n)$, следователно $T(n) = \Theta(n\lg n)$.

Опростяваме г) като извадим равенствата, дефиниращи $T(n)$ и $T(n-1)$:

$$T(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n^2$$
$$T(n-1) = 2\sum_{i=0}^{n-2} T(i) + (n-1)^2$$

Получаваме $T(n) - T(n-1) = 2T(n-1) + 2n - 1$ или $T(n) = 3T(n-1) + 2n - 1$. Полученото еквивалентно отношение решаваме лесно с метода на характериситчното уравнение. Хомогенната част поражда уравнението $x = 3$, с множество от корени $\{3\}$. Нехомогенната част поражда множеството корени $\{1, 1\}$. Като слеем двете мултимножества, получаваме пълния списък от корени $\{1, 1, 3\}$. Базисните решения са $1^n, n1^n, 3^n$. Последното расте най-бързо, следователно $T(n) = \Theta(3^n)$.

Задача 3 (a) Следната поредица размени нарежда масива $13, 8, 4, 6, 7, 11$:
$(1, 3) \to 4, 8, 13, 6, 7, 11$
$(2, 4) \to 4, 6, 13, 8, 7, 11$
$(3, 5) \to 4, 6, 7, 8, 13, 11$
$(5, 6) \to 4, 6, 7, 8, 11, 13$

(b) Правим индукция по n:

Масив с 1 елемент е нареден, т.е. за него са достатъчни 0 размени.

Да допуснем, че за сортиране на произволен масив с $n-1$ елемента са достатъчни не-повече от $n-2$ размени. Нека имаме масив $A[1 \dots n]$. Нека максималният елемент в него е $A[k]$. Разглеждаме 2 случая:

(1) $k = n$. Най-големият елемент си е на мястото, останалите – подмасивът $A[1 \dots n-1]$ можем да подредим с не-повече от $n-2$ размени.

(2) $k < n$. Прилагаме размяна (k, n). Най-големият елемент си отива на мястото, останалите – подмасивът $A[1 \dots n-1]$ можем да подредим с не-повече от $n-2$ размени. Така ще подредим масива с не-повече от $n-1$ размени.

И в двата подслучая подредихме A с не-повече от $n-1$ размени. От принципа на математическата индукция следва верността на подусловие (b) за всяко n.

Задача 4 (a) Забелязваме, че в променливата s се натрупва сумата от нарастващите стойности на i. Можем да формулираме инварианта на цикъла *while* така:

Когато се изпълнява ред 2, е вярна зависимостта $i = k \to s = \sum_{i=1}^{k-1} i$.

Доказваме индуктивно верността на инвариантата, а зависимостта опростяваме първо до $i = k \to s = k(k-1)/2$, а след това до $s = i(i-1)/2$.

Цикълът ще приключи когато $s > n$, тоест за най-малкото i, за което $i(i-1)/2 > n$. Лесно се вижда, че това се случва когато i надвиши $\sqrt{2n} + 1$.

Тъй като цикълът се изпълнява толкова пъти, колкото е нарастването на i, сложността на програмата ще бъде $\Theta(\sqrt{n})$.

(b) Забелязваме, че в цикъла на ред 3 променливата s натрупва сумата от многократно извикване на функцията $g(n-1)$. Можем да формулираме инварианта на цикъла for така:

Когато се изпълнява ред 3, е вярна зависимостта $s = tg(n-1)$. При излизане от цикъла $t = n$, следователно $s = ng(n-1)$.

От ред 2 имаме $g(1) = 1$, а за функцията, изразяваща сложността получаваме рекурентните ограничения:

$T(n) \leq nT(n-1) + cn$ (cn отчита изчисленията извън рекурсивното извикване)

$T(n) \geq nT(n-1), T(1) = c_0$, откъдето $\mathrm{T}(n) \geq c_1 n!$ или $T(n) = \Omega(n!)$.

Решаваме рекурентното неравенство $T(n) \leq nT(n-1) + cn$ със заместване:
$T(n) \leq n(n-1)T(n-2) + cn(n-1) + cn$
$T(n) \leq n(n-1)(n-2)T(n-3) + cn(n-1)(n-2) + cn(n-1) + cn$
$\dots$
$T(n) \leq c_0 n! + cn!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!})$

Тъй като сумата в скобите е сходяща и клони отдолу към числото e, получаваме неравенството $T(n) \leq c_0 n! + cn!e$ или $T(n) \leq (c_0 + ce)n!$.

Окончателно получаваме $T(n) = \Theta(n!)$.

Задача 5 (a) Всички ребра на G_2 са ребра и на G_1, следователно P_2 е път от s към t и в G_1. Той ще е по-дълъг или равен по дължина на P_1 (защото P_1 е най-късият път от s към t в G_1). Следователно $p_1 \leq p_2$.

(b) Нека G_1 има три върха – s, t, a и три ребра, свързващи всички двойки върхове (рисунката на графа е триъгълник). Нека всички ребра имат тегло 1. G_2 получаваме от G_1 като махнем реброто (s, a). И в двата графа най-краткият път между s и t минава по реброто между тях и има тегло 1.

(c) Нека G_1 има три върха – s, t, a и три ребра, свързващи всички двойки върхове (рисунката на графа е триъгълник). Нека всички ребра имат тегло 1. G_2 получаваме от G_1 като махнем реброто (s, t). В G_1 най-краткият път минава по реброто (s, t) и има тегло 1, а в G_1 минава през върха a и има тегло 2.

Задача 6 Махаме едно ребро от хамилтоновия цикъл C и получаваме хамилтоновия път C_1. В C_1 има $n-1$ ребра и той е свързан граф с n върха, следователно е покриващо дърво за графа G. Тъй като T е минимално покриващо дърво, а C_1 е по-лек от C, вярна е веригата неравенства:

$$\sum_{(u,v)\in T} w_{(u,v)} \leq \sum_{(u,v)\in C_1} w_{(u,v)} < \sum_{(u,v)\in C} w_{(u,v)}$$

откъдето следва твърдението на задачата.