Писмен изпит (поправителна сесия) по ДАА, 06.09.2014г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	40	20	20	20	140

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{i}, \qquad \lg((n!)^n), \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}, \qquad n^2 + n\lg n, \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}, \qquad \frac{3^n}{2^n}, \qquad \binom{n}{2}\frac{1}{\lg n}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^{i}$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$ б) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg n$

в) $T(n) = 9T(n-2) + 3^n$ г) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 3^n$

Задача 3 Алгоритъмът по-долу получава масив A, който съдържа n числа:

```
InversionSort(A[1...n])
i ← 1
while i < n do
    if A[i] > A[i+1]
        swap(A[i], A[i+1])
        if i = 1
            i ← i+1
        else i ← i-1
    else i ← i+1
```

(a - 20 точки) Докажете, че алгоритъмът сортира масива $A[1\ldots n]$.

(b - 20 точки) Ако времевата му сложност е $T(n)$, докажете че $T(n) = \Theta(n^2)$.

Задача 4 Дадена е редица от n числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Предложете бърз алгоритъм, който намира най-дългата растяща подредица.

Задача 5 Ориентиран граф $G(V, E)$ има n върха и не съдържа цикли. Най-дългият път в G (при единични тегла на ребрата) минава през $n-1$ ребра.

(a - 10 точки) Докажете, че в G може да се добави едно ново ребро така, че да се образува хамилтонов цикъл.

(b - 10 точки) Предложете бърз алгоритъм за намиране на върховете, които са краища на новото ребро.

Задача 6 - нова Опитайте да разделите на две групи с равна сума редиците от числа, дадени по-долу. Ако това е невъзможно, предложете кратко доказателство.

(a - 10 точки) $12, 7, 31, 14, 17, 22$

(b - 10 точки) $12, 9, 31, 15, 18, 27$

Задача 6 Задачата 'Хамилтонов Път' (HPP от *Hamiltonian path problem*) дефинираме така: Даден е граф $G(V, E)$. Съществуват ли върхове u, v на графа и път между тях, който включва всички останали върхове точно по веднъж ?

Тази задача прилича на задачата 'Хамилтонов цикъл' (HC).

Предложете полиномиална сводимост $HPP \propto HC$. Обосновете коректността ѝ.

Решения:

Задача 1 Означаваме с $f_1, f_2 \dots f_8$ дадените функции. Първо ги опростяваме, като ползваме основните свойства на асимптотичните нотации:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{i} = n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n^2 H_n = n^2\Theta(\lg n) = \Theta(n^2 \lg n) \\
f_2 &= \Theta(n^2) \text{ (ограничаваме с подходящи неравенства)} \\
f_3 &= \Theta(n^2) \\
f_4 &= \frac{n!}{2^n} \\
f_5 &= \frac{n^3}{\lg n} \\
f_6 &= n \lg(n!) = n\Theta(n \lg n) = \Theta(n^2 \lg n) \\
f_7 &\approx e = \Theta(1) \\
f_8 &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} = \Theta(3^n)
\end{aligned}$$

Сравняваме експоненциалните f_4 и f_8 с логаритмуване, получаваме $f_8 \prec f_4$.

Останалите функции са полиномиални, сравняваме ги според степента и допълнителният множител.

Окончателна наредба:

$$f_7 = \Theta(1) \prec f_2 \asymp f_3 = \Theta(n^2) \prec f_1 \asymp f_6 = \Theta(n^2 \lg n) \prec f_5 = \frac{n^3}{\lg n} \prec f_8 = \Theta(3^n) \prec f_4 = \frac{n!}{2^n}$$

Задача 2

Задача 3

Задача 4

Задача 5

Задача 6 - нова И за двете редици е невъзможно разбиване на две групи с равна сума:

(a) Сумата на редицата е нечетна, защото редицата съдържа 3 нечетни числа. Ако има разбиване, сумата ще е четна.

(b) Всички членове освен един се делят на 3. За всяко разбиване сумата на едната група няма да се дели на 3, а на другата ще се дели.

Задача 6 В графа $G(V, E)$ на задачата HPP добавяме нов връх и го свързваме към всички стари. В новополучения граф $G'(V', E')$ има хамилтонов цикъл точно когато в изходния има хамилтонов път, а конструирането на G' отнема полиномиално време, с което сводимостта е реализирана.