

Име: \_\_\_\_\_, ФН: \_\_\_\_\_, Спец./курс: \_\_\_\_\_

| Задача         | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | Общо |
|----------------|----|----|----|----|----|----|------|
| получени точки |    |    |    |    |    |    |      |
| максимум точки | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 120  |

*Забележка:* За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

**Задача 1** Масивът  $A[1 \dots n]$  съдържа  $m$  инверсии. Докажете, че алгоритъмът *InsertionSort* ще сортира  $A$  за  $\Theta(m + n)$  стъпки.

**Задача 2** Във всяка от  $n$  панички са поставени  $a_1, a_2, \dots, a_n$  жълтици. Имате право да вземете жълтиците от няколко панички, ако сумата им се дели на три. Предложете бърз алгоритъм, който да ви осигури максимална печалба.

**Задача 3** Алгоритъмът по-долу получава масив  $A$ , който съдържа  $n > 1$  числа:

GETFREQ( $A[1 \dots n]$ )

```

1   $w \leftarrow A[1]$ 
2   $cnt \leftarrow 1$ 
3  for  $i = 2$  to  $n$ 
4      if  $cnt = 0$ 
5           $cnt \leftarrow 1$ 
6           $w \leftarrow A[i]$ 
7      else if  $A[i] = w$ 
8           $cnt \leftarrow cnt + 1$ 
9      else  $cnt \leftarrow cnt - 1$ 
10 return  $w$ 

```

(а - 5 точки) Оценете времевата сложност на алгоритъма.

(б - 15 точки) Докажете, че ако масивът съдържа елемент, който се повтаря повече от  $\frac{n}{2}$  пъти, то алгоритъмът връща стойността на този често срещан елемент.

**Задача 4** Дадена е редица от  $n$  числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Предложете бърз алгоритъм, който намира най-дългата растяща подредица.

**Задача 5** Даден е неориентиран граф  $G(V, E)$  с теглова функция  $w : E \rightarrow \{a, b\}$ , която приема само две стойности ( $0 < a < b$ ).

Нека с  $r$  означим теглото на минималното покриващо дърво за  $G$ . Предложете линеен алгоритъм за намиране на  $r$  (не е нужно алгоритъмът да намира самото дърво).

*Упътване:* Разгледайте подграфа  $G'$  на  $G$ , който съдържа само леките му ребра. Каква е зависимостта между броя на свързаните компоненти на  $G'$  и  $r$  ?

**Задача 6** Формулирайте теоремата на Кук–Левин.