Първо домашно по Дискретни структури, 10.11.2017г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Задача 1. Докажете, че за всяко естествено $n \geq 2$ е вярно равенството:

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

Задача 2. Нека α е реално, а n е положително естествено число. Докажете, че някое от числата $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \dots n\alpha$ е на растояние най-много $\frac{1}{n}$ от някое цяло число.

Упътване: Ползвайте принципа на Дирихле.

Задача 3. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, а $\mathbb{S}_+$ е множеството от строго растящи крайни редици от естествени числа:

$$\mathbb{S}_+ = \{(n_0, n_1 \dots n_k) | k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}, n_0 < n_1 < \dots < n_k\}$$

Постройте биекция между множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{S}_+$.

Упътване: За произволно естествено число m разгледайте редицата от позициите на единиците в двоичния запис на m.

Задача 4. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, а $\mathbb{S}$ е множеството от крайни редици от естествени числа:

$$\mathbb{S} = \{(n_0, n_1 \dots n_k) | k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}\}$$

Постройте биекция между множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{S}$.

Упътване: За произволно естествено число m разгледайте редицата от броя на нулите между всеки две поредни единици в двоичния запис на m.

Задача 5. Нека $\mathbb{S}_Q^+$ е множеството от строго растящи безкрайни редици от рационални числа:

$$\mathbb{S}_Q^+ = \{\{q_i\}_{i=0}^{\infty} | \ \forall i \ (q_i \in \mathbb{Q}) \wedge (q_i < q_{i+1})\}$$

Нека $\prec$ е релация над редиците от $\mathbb{S}_Q^+$, определена така:

$\{q_i\} \prec \{p_i\}$, когато съществува n_0, такова, че за всяко $j > n_0$ и за всяко i е изпълнено неравенството $q_i < p_j$.

(a) Докажете, че $\prec$ е антирефлексивна, транзитивна и антисиметрична.

Дефинираме нова релация $\{q_i\} \sim \{p_i\}$, когато нито $\{q_i\} \prec \{p_i\}$, нито $\{p_i\} \prec \{q_i\}$

(b) Докажете, че $\sim$ е релация на еквивалентност.

(c) Как изглеждат класовете на еквивалентност на $\sim$, дайте интуитивно описание.

Решения

Задача 1.

Доказваме равенството по индукция:

(a) Проверяваме го за $n = 2$:

$$(1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{4} = \frac{3+1}{2 \times 2}$$

(b) Нека е изпълнено за n:

$$(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

Тогава:

$$(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) =$$

$$\frac{n+1}{2n}(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+1}{2n}\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} =$$

$$\frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Следователно даденото равенство е изпълнено за $n+1$. От принципа на индукцията следва, че е вярно за всяко $n \geq 2$.

Задача 2.

Да означим дробната част на $i\alpha$ с $\beta_i = i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor$ за $i = 1, 2 \dots n$.

Ползваме означението $\lfloor x \rfloor$ за закръгляне надолу до цяло число на реалното число x.

Всички числа β_i са в интервала $[0, 1)$.

Разсъждение А:

Ако за някое i е изпълнено $\beta_i \leq 1/n$, задачата е решена:

Получаваме $0 \leq i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor \leq 1/n$, или $\lfloor i\alpha \rfloor \leq i\alpha \leq \lfloor i\alpha \rfloor + 1/n$, тоест $i\alpha$ е на разстояние най-много $1/n$ от цялото число $\lfloor i\alpha \rfloor$.

Разсъждение В:

Разделяме интервала $[0, 1)$ на n равни подинтервала – $[0, 1/n), [1/n, 2/n), \dots, [n-1/n, 1)$.

Числата β_i са точно n на брой, ако някое от тях е в подинтервала $[0, 1/n)$, задачата е решена, съгласно *Разсъждение А:*. Ако всичките са в останалите $n - 1$ подинтервала, съгласно принципа на Дирихле поне две ще са в един подинтервал, тоест на разстояние по-малко от $1/n$.

Нека тези две числа са $\beta_i \leq \beta_j$, тогава:

$$0 \leq \beta_j - \beta_i \leq 1/n \tag{1}$$

Случай В.1: Нека $i < j$, да означим $k = j - i$, очевидно $1 \leq k < n$:

В този случай $\beta_j - \beta_i = (j - i)\alpha + \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$ и неравенството (1) придобива вида:

$$0 \leq (j - i)\alpha + \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor \leq 1/n$$

или

$$\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor \leq (j-i)\alpha \leq \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor + 1/n$$

заместваме $k = j - i$ и получаваме:

$$\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor \leq k\alpha \leq \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor + 1/n$$

Оказа се, че $k\alpha$ е на разстояние най-много $1/n$ от цялото число $\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ (в този случай е над цялото число).

Случай B.2: Нека $i > j$, да означим $k = i - j$, очевидно $1 \leq k < n$:

В този случай $\beta_j - \beta_i = (j-i)\alpha + \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$ и неравенството (1) придобива вида:

$$0 \leq (j-i)\alpha + \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor \leq 1/n$$

или

$$\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor \leq (j-i)\alpha \leq \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor + 1/n$$

заместваме $k = i - j$ и получаваме:

$$\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor \leq -k\alpha \leq \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor + 1/n$$

умножаваме по (-1):

$$\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor \geq k\alpha \geq \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor - 1/n$$

Оказа се, че $k\alpha$ е на разстояние най-много $1/n$ от цялото число $\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$ (в този случай е под цялото число).

Задача 3.

Първи начин:

Нека m е строго положително естествено число. Представяме го в двоична бройна система като редица от нули и единици. Нека в записа има $k+1$ единици, а номерацията на битовете е от дясно наляво и започваме от 0.

Обхождаме битовете отдясно наляво и при срещане на единица записваме позицията ѝ в редица. Нека най-дясната единица е на позиция n_0, следващата единица е на позиция n_1 и т.н. до старшата единица, която е най-вляво на позиция n_k.

Описахме функция, да я обозначим h, която по числото m строи редица $h(m) = (n_0, n_1 \ldots n_k)$. Редицата е строго растяща (всички единици в двоичния запис са на различни позиции). За различни числа ще получим различни редици (инекция), а за всяка редица можем да построим двоичен запис и число, което я поражда (сюрекция).

Пример: Нека $m = 22$, двоичният му запис е 10110, единици има на позиции 1, 2 и 4, следователно $h(22) = (1, 2, 4)$

Функцията h не е тотална, тя не е дефинирана за числото 0. Нека $H(n) = h(n+1)$, новата функция H е биекция от естествените числа към всички растящи редици и е решение на задачата.

Втори начин:

Нека $s = (n_0, n_1 \ldots n_k)$ е растяща редица, дефинираме функцията $f_+(s) = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_k}$.

На произволната редица s функцията $f_+(s)$ съпоставя число $m = f_+(s)$. Числото m има единици в двоичния си запис точно на позиции $n_0, n_1 \ldots n_k$, ако броим позициите от дясно на ляво, започвайки от 0 за младшия разряд в двоичния запис на m.

Очевидно f_+ е биекция между $\mathbb{S}_+$ и строго положителните естествени числа. На всяка редица съпоставя число, на различните редици съпоставя различни числа, а всяко положително число е образ на редица от $\mathbb{S}_+$.

Функцията $f(s) = f_+(s) - 1 = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_k} - 1$ ще е биекция от $\mathbb{S}_+$ към $\mathbb{N}$, обратната ѝ функция f^{-1} е решение на задачата.

Задача 4.

Първи начин:

Нека m е строго положително естествено число. Представяме го в двоична бройна система като редица от нули и единици. Нека в записа има $k+1$ единици, а номерацията на битовете е от дясно наляво и започваме от 0.

Нека n_0 е броят нули надясно от най-младшата (най-дясна единица в двоичния запис). Обхождаме единиците отдясно наляво и броим колко нули има между всеки две единици при обхождането. Нека n_1 е броят нули между най-младшата единица до следващата вляво, n_2 е броят нули втората и третата единица и т.н. до n_k – броят нули между двете най-леви единици в записа.

Описахме функция, да я обозначим h, която по числото m строи редица $h(m) = (n_0, n_1 \ldots n_k)$. За различни числа m_1 и m_2 ще получим различни редици $h(m_1)$ и $h(m_2)$ (инекция), а за всяка редица можем да построим двоичен запис и число, което я поражда (сюрекция).

Пример: Нека $m = 22$, двоичният му запис е 10110, дължините на интервалите нули са 1, 0 и 1, следователно $h(22) = (1, 0, 1)$

Функцията h не е тотална, тя не е дефинирана за числото 0. Нека $H(n) = h(n + 1)$, новата функция H е биекция от естествените числа към всички редици и е решение на задачата.

Втори начин:

Нека $s = (n_0, n_1 \ldots n_k)$ е произволна редица от естествени числа. Дефинираме нова редица $s_+ = (l_0, l_1 \ldots l_k)$ индуктивно по k така:

(1) $l_0 = n_0$

(2) за $i > 0$ нека $l_i = l_{i-1} + n_i + 1$.

По-неформално, $l_i = n_0 + n_1 + 1 + n_2 + 1 + \ldots + n_i + 1$. Очевидно $s_+ = (l_0, l_1 \ldots l_k)$ е строго растяща редица.

Функцията $g(s) = s_+$ е биекция, която на всяка редица $s \in \mathbb{S}$ съпоставя редица $s_+ \in \mathbb{S}_+$.

Да вземем функцията f_+ от решението на предната задача (втори начин). Нека $m = f_+(g(s))$.

Числото m ще съдържа в двоичния си запис единици на позиции $l_0, l_1 \ldots l_k$. Редицата от броя на нулите между всеки две поредни единици в двоичния запис на m ще е $n_0, n_1 \ldots n_k$ (тук броим и нулите след последната единица, те са точно n_0).

Функцията $h(s) = f_+(g(s)) - 1$ е биекция от $\mathbb{S}$ към $\mathbb{N}$, обратната ѝ функция е решение на задачата.

Задача 5.a

От дефиницията на $\prec$ следва, че $\{q_i\} \prec \{p_i\}$, когато някой член на $\{p_i\}$ е по-голям от всички членове на $\{q_i\}$.

Казано по друг начин, някой член на $\{p_i\}$ е строга горна граница на $\{q_i\}$. Оттук директно следва антирефлексивността и антисиметричността на $\prec$.

Транзитивността също се очевидна: от $\{q_i\} \prec \{p_i\} \prec \{r_i\}$ следва, че някое r_{n_1} надвишава всички $\{p_i\}$. Някое p_{n_0} надвишава всички $\{q_i\}$, следователно $r_{n_1} > p_{n_0} > q_i$, или $r_{n_1} > q_i$ за всяко

i, откъдето следва $\{q_i\} \prec \{r_i\}$.

Задача 5.b

Дефиницията на $\sim$ се състои от две отрицания.

Отрицанието на $\{q_i\} \prec \{p_i\}$ изглежда така: за всяко n_0 съществува $j > n_0$, такова, че съществува i за което $q_i \geq p_j$. Неравенството $q_i \geq p_j$ влече $q_i > p_{n_0}$.

Казано по-просто, отрицанието на $\{q_i\} \prec \{p_i\}$ е: за всяко n съществува i, такова че $q_i > p_n$.

Дефиницията на $\{q_i\} \sim \{p_i\}$ е еквивалентна на твърдението: всеки член на $\{q_i\}$ е по-малък от някой член на $\{p_i\}$ и всеки член на $\{p_i\}$ е по-малък от някой член на $\{q_i\}$.

(1) $\{p_i\} \sim \{p_i\}$, защото всеки член p_i е по-малък от p_{i+1} (редиците са растящи). Следователно $\sim$ е рефлексивна.

(2) Симетричността на $\sim$ следва от симетричната дефиниция.

(3) Транзитивност:

Нека $\{q_i\} \sim \{p_i\} \sim \{r_i\}$.

Избираме произволно i_0, за него съществува i_1, такова че $q_{i_0} < p_{i_1}$. За i_1 съществува i_2, такова че $p_{i_1} < r_{i_2}$, следователно $q_{i_0} < r_{i_2}$.

Избираме произволно j_0, за него съществува j_1, такова че $r_{j_0} < p_{j_1}$. За j_1 съществува j_2, такова че $p_{j_1} < q_{j_2}$, следователно $r_{j_0} < q_{j_2}$.

От неравенствата $q_{i_0} < r_{i_2}$ и $r_{j_0} < q_{j_2}$ и зависимостите между съответните индекси следва $\{q_i\} \sim \{r_i\}$.

Задача 5.c

Да разгледаме произволна редица $\{q_i\} \in \mathbb{S}_Q^+$. Тя е строго растяща редица от рационални числа. Интересен е въпросът дали е ограничена.

Има два случая за $\{q_i\}$:

(случай 1) $\{q_i\}$ е ограничена. В този случай лесно се проверяват следните свойства:

(1.a) $\{q_i\} \prec \{p_i\}$ точно когато някой член на $\{p_i\}$ е горна граница за $\{q_i\}$.

(1.b) $\{q_i\} \sim \{p_i\}$ точно когато $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ имат еднакви горни граници.

(случай 2) $\{q_i\}$ е неограничена. В този случай:

(2.a) $\{q_i\} \prec \{p_i\}$ никога не е изпълнено.

(2.b) $\{q_i\} \sim \{p_i\}$ точно когато $\{p_i\}$ е неограничена.

Интерпретация, ако имаме реални числа $\mathbb{R}$*:*

Ако $\{q_i\}$ е ограничена, тя е сходяща, нека $\lim\{q_i\} = q \in \mathbb{R}$. Класът на еквивалентност $[\{q_i\}]$ се състои от всички редици със същата граница q.

Ако $\{q_i\}$ е неограничена, тя е разходяща, $\lim\{q_i\} = +\infty$. Класът на еквивалентност $[\{q_i\}]$ се състои от всички неограничени редици.

От направените дотук разсъждения следва, че множеството от класовете на еквивалентност на релацията $\sim$ е изоморфно на $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Терминът 'изоморфно' ползваме в смисъл на биективно съответствие, на всеки клас, породен от ограничена редица съответства реално число, на класа на неограничените растящи редици съпоставяме специалния символ $+\infty$.

Интерпретация, ако нямаме реални числа:

Ако не разполагаме с конструкция на реалните числа, можем да ги дефинираме, като ползваме класовете на еквивалентност на релацията $\sim$.

Ако вземем само ограничените редици от $\mathbb{S}_Q^+$, породените от $\sim$ класове образуват структура, върху която можем да дефинираме аритметични операции, наредба и свойства, удовлетворяващи интуицията ни за реалните числа.