Второ домашно по Дискретни структури, 03.01.2018 г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

Задача	1	2a	2b	3	4	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Забележка: Предайте домашното на вашия асистент най-късно на 18 януари, преди започване на упражнението на групата Ви !

Задача 1. Бълха скача между съседните точките с цели координати в равнината. При скока тя се мести или надясно или нагоре, тоест от точка (x, y) бълхата отива или в точка $(x + 1, y)$, или в $(x, y + 1)$.

По колко различни начина бълхата може да стигне от точка $(0, 0)$ до точка (m, n).

Задача 2. Графът на хиперкуба B_n дефинираме така:
Върховете на B_n са всички редици от нули и единици с дължина n. Два върха са свързани с ребро, ако съответните им редици се различават в точно една позиция.

Разстояние между два върха е дължината на най-краткия път между тях.

(a) Нека имаме три върха в B_n. Докажете, че два от тях са на разстояние не по-голямо от $\frac{2n}{3}$.

(b) Посочете четири върха в $B_{3k}, k > 0$, такива, че всеки два от тях са на разстояние $2k$.

Задача 3. В дървото $T(V, E)$ върхове имат степен 1 или 3 (от всеки връх излизат 1 или 3 ребра). Докажете, че листата (върховете със степен 1) са с 2 повече от вътрешните върхове (върховете със степен 3).

Задача 4. Графът $G(V, E)$ е 3-регулярен (от всеки връх излизат точно 3 ребра). В G няма цикли с дължина 3 и 4. Докажете, че G има поне 10 върха. Възможно ли е G да има точно 10 върха?

Решения

Задача 1. За да стигне от точка $(0,0)$ до точка (m,n), бълхата трябва да направи m скока надясно и n скока нагоре, независимо от реда на скоковете. Различните начини на придвижване можем да представим като редица от $m+n$ букви. Членовете на редицата можем да означим с букви "r"(за скок надясно) и "u"(за скок нагоре). Всяка редица ще съдържа точно m букви "r"и точно n букви "u". Броят на различните редици е $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.

Задача 2.a Нека A, B и C са 3 върха на B_n.

Нека $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ представят i-та координата на редиците от нули и единици, представящи трите върха.

Тъй като координатите са 0 или 1, поне две от трите стойности α_i, β_i и γ_i съвпадат. Ще използваме това свойство, за да решим задачата.

Разглеждаме 4 варианта за тройката $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

1. трите координати съвпадат
2. $\alpha_i = \beta_i$, γ_i е различно
3. $\alpha_i = \gamma_i$, β_i е различно
4. $\beta_i = \gamma_i$, α_i е различно

Нека броят тройки от 4-те варианта е x_1, x_2, x_3, x_4. Общият брой тройки е n.

Нека $k = x_2 + x_3 + x_4$ е броят на тройките с различия. Най-голямото от числата x_2, x_3, x_4 ще е поне $k/3$.

Нека това най-голямо число е x_2 (разсъжденията в останалите 2 случая са аналогични). Този случай описва ситуацията, когато AB е най-късата страна в триъгълника ABC.

Щом $x_2 \geq k/3$ следва, че $x_3 + x_4 \leq 2k/3$. От $k \leq n$ следва $x_3 + x_4 \leq 2n/3$.

Върховете A и B имат съвпадащи координати в $x_1 + x_2$ случая и различаващи се координати в останалите $x_3 + x_4$ случая.

Но $x_3 + x_4 \leq 2n/3$, а най-краткият път в хиперкуба между A и B е броят на различните битове в описанието на върховете, следователно A и B са на разстояние не по-голямо от $\frac{2n}{3}$.

Задача 2.b Да разгледаме най-малкия случай – $k = 1$, това е обикновения куб B_3. В него лесно намираме 4 върха, всеки два на разстояние 2, примерно върховете $000, 011, 101, 110$.

За произволно k получаваме търсената четворка върхове, като повторим k пъти всеки бит във вече построените 4 върха за обикновения куб.

Задача 3. Нека n_1 е броят на върховете във степен 1, n_3 е броят на върховете във степен 3, а m е броят на ребрата в T.

Тъй като T е дърво, върховете са с едно повече от ребрата: $m = n_1 + n_3 - 1$.

От всеки връх излизат толкова ребра, колкото е степента му, от всички върхове на T излизат $n_1 + 3n_3$ ребра. Всяко ребро се брои 2 пъти, защото има два края, следователно $2m = n_1 + 3n_3$.

Изключваме m от двете равенства: $2(n_1 + n_3 - 1) = n_1 + 3n_3$

Получаваме $n_1 = n_3 + 2$, което и трябваше да се докаже.

Задача 4. Ако графът не е свързан, разсъждаваме за една свързана компонента в него. Тоест, ще покажем, че всяка свързана компонента има поне 10 върха.

Нека s е произволен връх в G, обхождаме графа в ширина, тръгвайки от s. Обхождането ще раздели графа на слоеве. В слой L_0 е само върха s.

В слой L_1 ще попаднат върховете, пряко свързани с s. От условието следва, че това са 3 върха, да ги означим с a, b, c. Не може да има ребро между някои от тези 3 върха, тъй като ще получим триъгълник (цикъл с дължина 3).

Следователно от всеки от върховете a, b, c излизат по две ребра към върхове от следващия слой L_2 (третото им ребро е назад към s).

Нека от a излизат ребра към a_1, a_2, от b излизат ребра към b_1, b_2 и от c излизат ребра към c_1, c_2.

Ако допуснем, че два от новите шест върха съвпадат, ще получим цикъл с дължина 4. Примерно, ако допуснем че a_1 и b_2 са един и същ връх, ще получим цикъла s, a, a_1, b.

От горните разсъждения следва, че графът има поне 10 върха - един в $L_0 = \{s\}$, три в $L_1 = \{a, b, c\}$ и шест в $L_2 = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$.

Графът може да е с точно 10 върха.

Можем да се убедим в това като добавим нови ребра в конструкцията с нивата от обхождането, без да добавяме нови върхове.

Добавяме шест ребра, свързващи върховете от слой L_2 в цикъл $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$. В полученият граф всеки връх е от степен 3 и няма цикли с дължина 3 и 4.

Този граф е единствен с точност до изоморфизъм – това е графът на Петерсен.