Поправителен изпит по "Дискретни структури" (задачи), СУ, ФМИ, 29. 08. 2018 г.

Име: ________________________________ ФН: _____ Спец.: ____ Курс: ___

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	16	16	16	16	16	80

Задача 1. Докажете, че числото $n^3 - n$ се дели на 6 за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Нека A е множеството от всички безкрайни редици $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$, състоящи се от нули и единици ($\alpha_i \in \{0, 1\}$)

Определяме релацията $R \subseteq A \times A$ така – две редици $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$ и $\beta = \beta_0\beta_1\beta_2\ldots$ са в релация, когато се различават на краен брой позиции.

(a - 8 точки) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

(b - 8 точки) Докажете, че класовете на еквивалентност, породени от R са безкрайни изброими множества.

Задача 3. Нека G е графът на Петерсен.

(a - 8 точки) Докажете, че за произволно избрани 5 върха в G, поне два са съседни (свързани са с ребро).

(b - 8 точки) Може ли да изберем 4 върха в G така, че да няма ребра между тях?

Задача 4. Всеки от n студента трябва да запише 2 избираеми дисциплини. Студентите могат да избират измежду k дисциплини. Колко са възможните начини за записване от групата студенти?

Задача 5. Намерете минимална дизюнктивна нормална форма на булевата функция $f(x, y, z) = (\overline{x} \wedge z) \vee (x \oplus y)$.

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Означаваме с $f(n) = n^3 - n$ изразът, който ни интересува.

Първи начин (индукция):

Очевидно $f(0) = 0$ се дели на 6. Нека $f(n)$ се дели на 6, тогава $f(n+1) = (n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3(n^2 + n)$. Получаваме $f(n+1) = f(n) + 3n(n+1)$, което се дели на 6, защото двете събираеми се делят на 6 ($n(n+1)$ се дели на 2, защото или n или $n+1$ е четно).

Втори начин (делимост):

Преобразуваме:

$f(n) = n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

$n(n-1)(n+1)$ се дели на 6, защото от трите поредни числа $n-1, n$ и $n+1$, точно едно се дели на 3, а едно или две се делят на 2.

Задача 2.

Свойството $(\alpha, \beta) \in R$ можем да изкажем така – съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, такова че за всяко $i > n_0, \alpha_i = \beta_i$. Достатъчно е за n_0 да изберем най-големия номер на позиция, в която двете редици се различават.

(a) Рефлексивността на R следва от факта, че всяка редица се различава от себе си в нула позиции.

Симетричността на R също следва тривиално от симетричността на дефиницията на релацията.

Транзитивност: нека $(\alpha, \beta) \in R, \quad (\beta, \gamma) \in R$. Съществуват номера n_0, n_1, такива, че за $i > n_0, \alpha_i = \beta_i$ и за $i > n_1, \beta_i = \gamma_i$. Нека $n_2 = max(n_0, n_1)$, тогава за всяко $i > n_2, \alpha_i = \beta_i, \beta_i = \gamma_i$, следователно за $i > n_2, \alpha_i = \gamma_i$, тоест $(\alpha, \gamma) \in R$.

(b) Нека $\alpha \in A$ е редица от нули и единици, а $[\alpha]$ е породеният от нея клас на еквивалентност относно релацията R. Построяваме биекция между $[\alpha]$ и $\mathbb{N}$ така:

На α съпоставяме 0.

Нека $\beta \neq \alpha, (\alpha, \beta) \in R$. Редиците α и β се различават на поне една позиция, нека n е най-големият номер на позиция, в която се различават.

Стром двоично число j с $n+1$ цифри, което има единици в позиции, където α и β се различават, като броим позциите от n към 0, двоичният запис изглежда така:

$j = (\alpha_n \oplus \beta_n)(\alpha_{n-1} \oplus \beta_{n-1}) \ldots (\alpha_0 \oplus \beta_0)$

Старшата цифра на j е единица, тоест $j > 0$. На β съпоставяме числото j.

Лесно се вижда, че построеното съпоставяне е биекция, следователно $[\alpha]$ е изброимо безкрайно множество.

Задача 4.

Всеки студент избира 2 от k дисциплини, това става по $\binom{k}{2}$ начина.

Комбинациите за записване са редици от избора на n-те студента. Тъй като всеки член на редицата има $\binom{k}{2}$ възможни стойности, броят на възможните комбинации е $\binom{k}{2}^n$.

Задача 5.

Изчисляваме f в табличен вид:

x	y	z	$\overline{x} \wedge z$	$x \oplus y$	f
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Построяваме елементарните конюнкции съгласно теоремата на Бул и ги поставяме в първата колона на таблицата на импликантите по-долу. След пресмятане на всички импликанти получаваме (със $*$ са отбелязани погълнатите имликанти):

I_3	I_2	I_1
$\overline{x}\overline{y}z*$	$\overline{x}z$	
$\overline{x}y\overline{z}*$	$\overline{y}z$	
$\overline{x}yz*$	$\overline{x}y$	
$x\overline{y}\overline{z}*$	$x\overline{y}$	
$x\overline{y}z*$		

Простите импликанти са $\overline{x}z, \overline{y}z, \overline{x}y$ и $x\overline{y}$. Сега строим таблица в която отбелязваме коя от тях покрива единица на f:

N_f	$\overline{x}z$	$\overline{y}z$	$\overline{x}y$	$x\overline{y}$
001	$*$	$*$		
010			$*$	
011	$*$		$*$	
100				$*$
101		$*$		$*$

Единицата на функцията 010 е покрита само от импликантата $\overline{x}y$, а единицата 100 е покрита само от $x\overline{y}$. Следователно и двете прости импликанти са задължителни. Те покриват и единици 011 и 101. Остава непокрита само 001, за която имаме избор от другите 2 прости импликанти $\overline{x}z$ и $\overline{y}z$.

Следователно има две минимални ДНФ и те са:

$$f(x, y, z) = \overline{x}z \vee \overline{x}y \vee x\overline{y}$$
$$f(x, y, z) = \overline{y}z \vee \overline{x}y \vee x\overline{y}$$