Поправителен изпит по Дискретни структури, 10.09.2020 г.

Име: ________________________________, ФН:______, Група:_____ , Курс:____

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	16	16	16	16	16	80

Задача 1. Докажете, че числото $n^3 + 5n$ се дели на 6 за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Даден е неориентирания граф $G(V, E)$.

Ребрата са боядисани в два цвята – син и червен, като от всеки връх излиза най-много едно синьо и най-много едно червено ребро.

Сините ребра са повече от червените.

Докажете, че в G има път със следните свойства:

(1) От крайните върхове на пътя излиза точно по едно ребро.

(2) Крайните ребра в пътя са сини.

Задача 3. Играта спортен бридж започва с раздаване на тесте от 52 карти. Четирите играча получават по 13 карти от тестето, което съдържа 4 вида карти (цвята) - трефи, кари, купи, пики. Всеки цвят в тестето съдържа 13 карти, означавани със символите $2, 3, \ldots, 9, T, J, D, K, A$.

Разпределение наричаме редицата от числа (c, d, h, s), която задава броя на трефите, карите, купите и пиките, които играчът е получил при раздаването.

Колко са разпределенията, при които играчът има поне два цвята с точно 4 карти във всеки от тях?

Задача 4. Колко са всички разпределения в играта спортен бридж?

Упътване: Дефиниция на разпределение е дадена в предната задача.

Задача 5. Двоичната функция $f(x, y, z)$ е определена с редицата стойности $f = (11101010)$.

(a - 8 точки) Намерете минимална дизюнктивна нормална форма на $f(x, y, z)$.

(b - 8 точки) Шеферова ли е функцията f?

Решения

Задача 2. Разглеждаме свързаните компоненти на графа.

Тъй като от всеки връх излизат най-много 2 ребра, тези компоненти са цикли, прости пътища или изолирани върхове.

Изолираните върхове не са интересни.

Циклите се състоят от редуващи се сини и червени ребра. За да няма съседни едноцветни ребра, трябва циклите да са с четен брой ребра. Следователно броят на червените и сини ребра във всички цикли е еднакъв.

Остават простите пътища, те също се състоят от редуващи се сини и червени ребра. Ако единия край на път е червен, броят на червените ребра е равен на сините (при друг син край) или по-голям (при друг червен край).

След като общия брой на сините ребра е по-голям от червените, нужно е да има поне една компонента с повече сини ребра. Единствената възможност е прост път с два сини края.

Задача 3.

Задача 4.

Задача 5. Условие (a):

Таблицата на f изглежда така:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Построяваме елементарните конюнкции съгласно теоремата на Бул и ги поставяме в първата колона на таблицата на импликантите по-долу.

След пресмятане на всички импликанти получаваме (със $*$ са отбелязани погълнатите имликанти):

I_3	I_2	I_1	
$\overline{x}\overline{y}\overline{z}*$	$\overline{x}\overline{y}$	$\overline{z}$	
$\overline{x}\overline{y}z*$	$\overline{x}\overline{z}*$		
$\overline{x}y\overline{z}*$	$\overline{y}\overline{z}*$		
$x\overline{y}\overline{z}*$	$y\overline{z}*$		
$xy\overline{z}*$	$x\overline{z}*$		

Сега строим таблица в която отбелязваме коя проста имликанта покрива единица на f:

N_f	$\overline{x}\overline{y}$	$\overline{z}$	
000	$*$	$*$	
001	$*$		
010		$*$	
100		$*$	
110		$*$	

Единиците 001 и 010 са покрити от единствените импликанти $\overline{x}\overline{y}$ и $\overline{z}$, следователно те са задължителни.

Следователно, функцията има единствена минимална ДНФ:

$$f(x, y, z) = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{z}$$

Условие (b):

Функцията f е шеферова, защото сама образува пълно множество. Това може да се докаже, като изразим чрез f друго множество от булеви функции, за което знаем, че е пълно:

Функцията на Шефер $x|y$, която сама образува пълно множество се изразява така:
$x|y = f(x, x, y)$

Горното тъждество може да бъде проверено по табличния метод.

Задачата може да се реши и с критерия на Пост. За да установим, че f е шеферова, достатъчно е да проверим, че тя не е самодвойнствена и не запазва нито нулата, нито единицата. Това лесно се вижда от таблицата на f.