

Име: \_\_\_\_\_, ФН: \_\_\_\_\_, Група: \_\_\_\_\_, Курс: \_\_\_\_\_

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	16	16	16	16	16	80

**Задача 1.** Докажете, че числото  $n^3 - n$  се дели на 6 за  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Задача 2.** Колко на брой са строго растящите редици от шест цели положителни числа, ако първият член е 1 и разликата на всеки два поредни члена не надхвърля 4?

**Задача 3.** Всяка точка в пространството  $\mathbb{R}^3$  е оцветена в синьо, червено, или жълто. Докажете, че както и да са оцветени точките, за всяко  $r > 0$  съществуват две едноцветни точки на разстояние, равно на  $r$ .

*Упътване:* Използвайте принципа на Дирихле.

**Задача 4.** На планетата Плюк<sup>1</sup> има 20 града, като от всеки град излиза поне едно шосе към друг град. Общият брой шосета на планетата е 15.

Какво е най-благоприятното разположение на шосетата на Плюк, такава, че стартирайки от подходящ град с автомобил, да е възможно обикаляне на максимален брой градове.

(a – 8 точки) Изчислете максималния брой посетени градове и нарисуйте пътната карта при избраното разположение на шосетата.

(b – 8 точки) Обосновете отговора си.

**Задача 5.** Двоичната функция  $f(x, y, z)$  е определена с редицата стойности  $f = (11100110)$ .

(a - 10 точки) Намерете всички минимални дизюнктивни нормални форми на  $f(x, y, z)$ .

(b - 6 точки) Шеферова ли е функцията  $f$  ?

<sup>1</sup>Плюк е измислена планета, на която се развива действието на филма-антиутопия «Кин-дза-дза!» (1986, режисьор Георгий Данелия).

Плюк („плюнка“) е чатланска планета в галактиката Кин-дза-дза.

Водата ѝ била преработена в луц (гориво за междузвездни полети), а флората и фауната били напълно унищожени. Храната е ядлива пластмаса.

Повърхността ѝ е пясъчна пустиня, а жителите живеят в подземни помещения. Те приличат на хора и разбират езика на земните пришълци, тъй като могат да четат мисли, но техният собствен език е много ограничен и съдържа само няколко думи. Поради телепатията, на Плюк не е прието да се мисли истината.

Цивилизацията там е високотехнологична – пътуват бързо из галактиката, имат по-съвършени оръжия и прочее, но е варварска в екологическо, социално и културно отношение.

Населението се дели на две касти: висша (чатлани) и низша (пацаки). Плюк е чатланска планета и пацаките са подложени на дискриминация. За да се докаже към коя каста принадлежи човек, трябва да се изследва с малък прибор – визатор. Ако на прибора светне зелена лампичка, изследваният е „пацак“, ако е оранжева, той е „чатлан“. Пацакът е длъжен да носи звънче на нос си и се покланя пред чатлана при среща, казвайки „КУ“. Освен това, чатланите се разпознават по цвета на панталоните, който при тях е жълт, а ако чатланът е богат и влиятелен, може да носи малиновочервени гащи. Сините гащи са привилегия за висшия елит на планетата.

Филмът бързо става култов в зоната на руско-говорещите страни поради разнообразни причини – от неподражаемия изкуствен жаргон, до аналогите между съветското общество (и всяко съвременно технологично и бюрократизирано общество) и антиутопичната картина, която изобразява.

Името и особености на планетата се използват често като жаргонни изрази, в журналистически публикации, също и в задачи за ученици и студенти.

## Решения

Задача 2.

Задача 3.

Задача 4.

Задача 5. Условие (а):

Таблицата на  $f$  изглежда така:

$x$	$y$	$z$	$f$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Построяваме елементарните конюнкции съгласно теоремата на Бул и ги поставяме в първата колона на таблицата на импликантите по-долу.

След пресмятане на всички импликанти получаваме (със \* са отбелязани погълнатите импликанти):

$I_3$	$I_2$
$\overline{xy}z^*$	$\overline{xy}$
$\overline{xy}z^*$	$\overline{xz}$
$\overline{xy}z^*$	$\overline{yz}$
$x\overline{y}z^*$	$y\overline{z}$
$xy\overline{z}^*$	

Сега строим таблица в която отбелязваме коя проста импликанта покрива единица на  $f$ :

$N_f$	$\overline{xy}$	$\overline{xz}$	$\overline{yz}$	$y\overline{z}$
000	*	*		
001	*		*	
010		*		*
101			*	
110				*

Единиците 101 и 110 са покрити от единствените импликанти  $\overline{yz}$  и  $y\overline{z}$ , следователно те са задължителни.

Те двете не покриват единствено единицата 000, можем да я покроем с коя да е от импликантите  $\overline{xy}$  и  $\overline{xz}$ . Те са с еднакъв брой букви, следователно има две минимални ДНФ:

$$f(x, y, z) = \overline{xy} \vee \overline{yz} \vee y\overline{z}$$
$$f(x, y, z) = \overline{xz} \vee \overline{yz} \vee y\overline{z}$$

Условие (b):

Функцията  $f$  е шеферова, защото сама образува пълно множество. Това може да се докаже, като изразим чрез  $f$  друго множество от булеви функции, за което знаем, че е пълно:

Функцията на Шефер  $x|y$ , която сама образува пълно множество се изразява така:  
 $x|y = f(x, x, y)$

Горното твърдение може да бъде проверено по табличния метод.

Задачата може да се реши и с критерия на Пост. За да установим, че  $f$  е шеферова, достатъчно е да проверим, че тя не е самодвойствена и не запазва нито нулата, нито единицата. Това лесно се вижда от таблицата на  $f$ .