Поправителен изпит по Дискретни структури, 21.08.2022г.

Име: ________________________________, ФН:___________, Група:__

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	16	16	16	16	16	80

Задача 1. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството:

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} > \frac{n+1}{2}$$

Задача 2. За полета до Дортмунд на летище София работят 2 гишета за чекиране. На първото гише има опашка от 5 човека, а на второто – от 4. След като се чекират пътниците трябва да преминат през скенера за метални предмети (той е само един). По колко различни начина чакащите на опашките могат да минат през скенера, ако минаването през него става веднага след чекирането?

Задача 3. Докажете, че във всеки неориентиран граф има път от всеки връх с нечетна степен до друг връх с нечетна степен.

Задача 4. Множеството A съдържа 1012 естествени числа от $I_{2022} = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$.

Докажете, че има две числа от A, чиято сума е 2023.

Задача 5. Двоичната функция $f(x, y, z)$ е определена с редицата стойности $f = (11101010)$.

(a - 8 точки) Намерете минимална дизюнктивна нормална форма на $f(x, y, z)$.

(b - 8 точки) Шеферова ли е функцията f?

Отговори:

Задача 2.

Задачата може да се сведе до „Намерете колко са булевите вектори с дължина k+n (в случая 5+4), където единиците са k (в случая 5), а нулите са n (в случая 4)“.

Всеки вектор ще представлява точно определено нареждане на хората, като единиците ще съответстват на хората, идващи от първото гише, а нулите ще съответстват на хората, идващи от второто.

Отговорът е $\binom{k+n}{k}$, в конкретния случай $\binom{9}{5} = 126$.

Задача 3.

(решение а) Използваме свойството, че броят върхове с нечетна степен е четен.

(решение б) Правим разходка от връх с нечтна степен, като не повтаряме ребра. Тя ще свърши принудително в друг връх с нечетна степен.

Задача 5.

Условие (а):

Таблицата на f изглежда така:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Построяваме елементарните конюнкции съгласно теоремата на Бул и ги поставяме в първата колона на таблицата на импликантите по-долу.

След пресмятане на всички импликанти получаваме (със $*$ са отбелязани погълнатите имликанти):

I_3	I_2	I_1	
$\overline{x}\overline{y}\overline{z}*$	$\overline{x}\overline{y}$	$\overline{z}$	
$\overline{x}\overline{y}z*$	$\overline{x}\overline{z}*$		
$\overline{x}y\overline{z}*$	$\overline{y}\overline{z}*$		
$x\overline{y}\overline{z}*$	$y\overline{z}*$		
$xy\overline{z}*$	$x\overline{z}*$		

Сега строим таблица в която отбелязваме коя проста имликанта покрива единица на f:

N_f	$\overline{xy}$	$\overline{z}$	
000	$*$	$*$	
001	$*$		
010		$*$	
100		$*$	
110		$*$	

Единиците 001 и 010 са покрити от единствените импликанти $\overline{xy}$ и $\overline{z}$, следователно те са задължителни.

Следователно, функцията има единствена минимална ДНФ:

$$f(x, y, z) = \overline{xy} \vee \overline{z}$$

Условие (b):

Функцията f е шеферова, защото сама образува пълно множество. Това може да се докаже, като изразим чрез f друго множество от булеви функции, за което знаем, че е пълно:

Функцията на Шефер $x|y$, която сама образува пълно множество се изразява така:
$x|y = f(x, x, y)$

Горното тъждество може да бъде проверено по табличния метод.

Задачата може да се реши и с критерия на Пост. За да установим, че f е шеферова, достатъчно е да проверим, че тя не е самодвойствена и не запазва нито нулата, нито единицата. Това лесно се вижда от таблицата на f.