

Име: \_\_\_\_\_, ФН: \_\_\_\_\_, Група: \_\_\_\_\_

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

*Забележка:* За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

**Задача 1** Докажете, че  $2^{3n} - 7n - 1$  се дели на 49 за всяко цяло число  $n \geq 0$ .

**Задача 2** Докажете, че формулата  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$  важи за произволни множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**Задача 3** Нека  $F$  е множеството от всички тотални функции от вида  $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$ . Нека  $R$  е релация над  $F$ , такава че  $fRg \iff \forall x \in \{a, b, c, d\} \quad f(x) \equiv g(x) \pmod{2}$ .

- Докажете, че  $R$  е релация на еквивалентност.
- Намерете колко са функциите в  $F$  и колко са класовете на еквивалентност на  $R$ .

**Задача 4** Механизмът на сейф се състои от седем колелца, всяко от които може да заема десет различни позиции, обозначени с цифрите от 0 до 9. Когато механизмът работи правилно, само една седемцифрена поредица може да отвори сейфа.

Поради повреда в механизма сейфът се отваря, ако поне четири от седемте колелца са в правилно положение. Колко са седемцифрените поредици, отключващи повредения сейф?

**Задача 5** При едно проучване, проведено сред 35 студенти, се установило, че плуване спортуват 23 студенти, бягане – 26, волейбол – 24.

След второ, по-подробно проучване било допълнително установено, че плуване и волейбол спортуват 15 студенти, плуване и бягане – 16, волейбол и бягане – 17, а с трите вида спорт се занимават 9 студенти. Колко студенти не спортуват нито плуване, нито бягане, нито волейбол?

**Задача 6** Редицата на Фибоначи  $F_n$  е дефинирана с условията:  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  за  $n > 1$ .

Редицата  $R_n$  е дефинирана с условията:  $R_0 = 1, R_1 = 1, R_n = R_0 + R_1 + \dots + R_{n-2}$  за  $n > 1$ .

Докажете, че  $R_n = F_n$  за  $n > 0$ .