

Име: _____, ФН: _____, Група: _____

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	6	6	6	6	6	30

Задача 1. Нека R е релация над множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$, такава че:

$$(a, b)R(c, d) \iff a \leq c \wedge b \mid d$$

Докажете, че R е частична наредба и намерете най-малкия елемент, ако такъв съществува.

Задача 2. Дефинираме $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ по следния начин:

$$f(a, b) = c \iff c > 0 \wedge c \text{ е решение на } ax - \frac{b}{x} = 0$$

Покажете, че f е коректно дефинирана и не е инекция. Изброимо ли е множеството:

$$\{(2023, b) \mid f(2023, b) \in \mathbb{Z}^+\} \quad ?$$

Упътване: Постройте биекция към познато изброимо или неизброимо множество.

Задача 3. След поредните ожесточени избори в Лапландия 6 партии - БРЕГ, БДПП, Ренесанс, СПД, ПСБ и НТИ успели да прескочат бариерата за влизане в Народното събрание, като завоювали съответно 69, 64, 37, 36, 23 и 11 мандата. Поради високото напрежение между управляващи и опозиция по случай приближаващата Коледа, се наложило депутатските места да бъдат специфично разпределени. Пленарната зала в парламента се състои от 2 части - Източна и Западна, всяка от които има по 200 места. Управляващите депутати от БРЕГ, БДПП и СПД трябва да бъдат настанени в едната част, а депутатите от Ренесанс, ПСБ и НТИ - в другата. Всяка седалка в залата си има или надпис с името на партията, за която е предназначена, или е обозначена като празна. Колко са всички възможности за надписване на местата в Народното събрание, ако се знае, че за всяка парламентарна група са надписани точно толкова места, колкото е и числеността ѝ?

Задача 4. Докажете, че за всяко разположение на 5 точки по повърхността на сфера има 4 от тях, които лежат на една затворена полусфера.

Задача 5. Всяка клетка на таблица 3×3 (с фиксирана ориентация) се оцветява или в синьо, или в червено. По колко начина може да стане това оцветяване, така че да няма червена област с размер 2×2 ?

Упътване: Приложете принципа за включване и изключване.

Примерни решения:

Задача 1.

Задача 2.

Задача 3.

Задача 4.

Задача 5.