Писмен изпит по ДС за минали години, 13.02.2015г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 В равнината е даден квадратът $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 5\}$. Релацията $R \subset S \times S$ е определена по следния начин:

$$R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 = x_2, \quad y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Да се докаже, че R е релация на еквивалентност и да се определи класът на еквивалентност на точката $(2, 4)$.

Задача 2 Дадено е множество A и функции $f : A \to A$ и $g : A \to A$, които са биекции. Известно е, че $\exists x_0 \in A : f(x_0) \neq g(x_0)$. Докажете, че $\exists x_1 \in A : x_1 \neq x_0,\ f(x_1) \neq g(x_1)$.

Задача 3 Нека $n \in N^+$ и $a_n = 2 + 8 + 24 + \ldots + n2^n$. Намерете формула за a_n, като съставите линейно рекурентно уравнение за a_n и го решите при подходящи начални условия.

Задача 4 Точките от една окръжност са оцветени в два цвята. Докажете, че съществува равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове, лежащи на окръжността.

Упътване: Впишете правилен петоъгълник в окръжността и разсъждавайте за цветовете на върховете му.

Задача 5 Нека графът B_n е n-мерният двоичен куб (върховете са всички n-мерни двоични вектори, два върха са свързани, ако векторите им се различават на точно една позиция). Дайте обосновани отговори на следните въпроси:

а) Колко ребра има най-късият път от връх $\alpha = 00\ldots0$ до връх $\beta = 11\ldots1$?

б) Какъв е броят на всички най-кратки пътища от връх α до връх β?

Задача 6 Напишете съвършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x, y, z) = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$.