Поправителен писмен изпит по ДС, 25.08.2015г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Общо |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| получени точки | | | | | | | |
| максимум точки | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 120 |

*Забележка:* За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

**Задача 1** В курса "Операционни системи"учат $n \geq 2$ студенти. Те трябва да подготвят презентации на избрани от тях теми, разпределени в малки групи. Докажете, че независимо от числеността на курса:

(а – 10т.) студентите могат да се разделят в групи от двама или трима души;

(б – 10т.) студентите могат да се разделят в групи от двама или трима души, като има най-много две групи от по двама студенти.

**Задача 2** Дадено е крайно множество $A$ и тотална функция $f : A \to A$, която е инекция. Докажете, че $f$ е биекция.

**Задача 3** Нека $G(V, E)$ е свързан неориентиран граф, а с $d(v), v \in V$, означаваме степента на връх $v$ (броя ребра, излизащи от $v$). Нека $G$ има $l$ върха с нечетна степен.

(а – 10т.) Докажете, че $l$ е четно.

(б – 10т.) Намерете минималния брой ребра, които при добавяне към $E$ ще превърнат $G$ в ойлеров граф.

**Задача 4** Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната 10. Докажете, че както и да се изберат пет точки от вътрешността на триъгълника, то между тях ще има поне две на разстояние, по-малко от 5.

*Упътване:* Използвайте наготово следното твърдение: всяка отсечка между две точки в произволен триъгълник е не по-дълга от най-голямата му страна; равенство се достига само когато точките са краищата на тази страна.

**Задача 5** Да се намери броят на булевите функции на $n$ променливи, за чиято съвършена дизюнктивна нормална форма е вярно следното:

(а – 10т.) буквата $x_1$ се среща само с отрицание;

(б – 10т.) има три събираеми и във всяко от тях има точно две букви с отрицания.

**Задача 6** Напишете съвършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee z) \wedge (x \oplus y)$.

**Примерни решения**

**Задача 2** Нека $B = \{y : \exists x \in A, y = f(x)\}$ е множеството от значенията на $f$.

Ако $A = B$, то $f$ е биекция.

Ако $B$ е същинско подмножество на $A$, то има по-малко елементи и тогава, съгласно с принципа на Дирихле, поне два елемента на $A$ ще бъдат изобразени от $f$ в един елемент на $B$, което противоречи на условието, че $f$ е инекция.

**Задача 4** Нека триъгълникът е $ABC$. Да означим с $A_1, B_1$ и $C_1$ средите на страните $BC, AC$ и $AB$ съответно и да ги свържем с отсечки.

Получаваме разрязване на $\triangle ABC$ на четири еднакви равностранни триъгълника – $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$ и $\triangle A_1B_1C$.

Както и да избираме пет точки в $\triangle ABC$, поне две от тях ще попаднат в един от четирите малки триъгълника (следствие от принципа на Дирихле).

Ползваме упътването за такава двойка точки. Дължината на свързващата ги отсечка ще е най-много 5 – дължината на страната на съдържащия ги малък триъгълник. Равенство ще се достига само когато са върхове на този триъгълник, но това е невъзможно, защото са вътрешни за $\triangle ABC$, следователно разстоянието между тях е по-малко от 5.

**Задача 5** При броенето ще правим разсъждения за таблицата, представяща възможна функция $f$ и вида на пълните елементарни конюнкции (за краткост ще ги наричам импликанти), за които $f$ приема стойност 1:

(А) Функция от този вид е 0, когато $x_1 = 1$, т. е. за всички редове от втората половина на таблицата. В първата половина има $2^{n-1}$ реда и там $f$ може да приема произволни стойности. За всеки от тези $2^{n-1}$ реда стойността на $f$ е 0 или 1, следователно за $f$ има $2^{2^{n-1}}$ възможности.

Един от случаите е специален – когато колоната от стойности на $f$ съдържа само нули, тя не може да се представи като СДНФ, защото има 0 импликанти. Като махнем този специален случай, броят на функциите, удовлетворяващи условието, е $2^{2^{n-1}} - 1$.

(Б) Функция от този вид има точно 3 импликанти. Съответният ред за всяка от тези имликанти в таблицата на $f$ съдържа точно 2 нули и $n-2$ единици в низа, описващ стойностите на булевите променливи. Броят на всички такива редове е $\binom{n}{2}$.

Можем да изберем 3 от тези $\binom{n}{2}$ реда по $\binom{\binom{n}{2}}{3}$ начина, това е и броят на функциите, удовлетворяващи условието.